# 2019

## MATHEMATICS — GENERAL

**Paper : CC/GE–2**

**Full Marks : 65**

*Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.*

*প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক*

**বিভাগ - ক**

**(মান : ১০)**

১। সঠিক উত্তর চিহ্নিত করো ঃ ১×১০

(ক) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ অনুক্রমটির গরিষ্ঠ অধঃসীমা (greatest lower bound) হল

(অ) $\infty$ (আ) 1 (ই) 0 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(খ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী (ই) সসীমভাবে দোদুল্যমান (ঈ) অসীমভাবে দোদুল্যমান।

(গ) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=$

(অ) $\infty$ (আ) 0 (ই) 1 (ঈ) অসংজ্ঞাত।

(ঘ) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=e^{4x}$ অবকল সমীকরণটির C. F. হল

(অ) $C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$ (আ) $C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}$

(ই) $C_1e^{6x}+C_2e^{-x}$ (ঈ) এগুলির কোনোটিই নয়।

(ঙ) $z=(x+a)(y+b)$ অপেক্ষকটি থেকে $a$ এবং $b$ অপসারণ করলে যে আংশিক অন্তরকলন সমীকরণ (partial differential equation) পাওয়া যাবে, সেটি হল

(অ) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (আ) $Z=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$

(ই) $Z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(চ) যদি $\left(a\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}\right)$ এবং $\left(-5\hat{i}+2\hat{j}+b\hat{k}\right)$ ভেক্টর দুটি সমরেখ (collinear) হয়, তবে

(অ) $a = b = 1$ (আ) $a = -15, b = 3$

(ই) $a = 3, b = 9$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্নিহিত কোণের পরিমাপ হল

(অ) 0 (আ) $\frac{\pi}{3}$

(ই) $\frac{\pi}{4}$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(জ) যদি $7^{30}$ কে 4 দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ হবে

(অ) 0 (আ) 1 (ই) 2 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঝ) $9x + 6y = 1$, এই Diophantine সমীকরণটির বীজ (solution) আছে

(অ) কেবলমাত্র একটি (আ) দুটি

(ই) একটিও নয় (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঞ) বুলীয় বীজগণিতে $(x+y)'+\left(x+y'\right)'$

(অ) $y$ (আ) $x$ (ই) $x'$ (ঈ) $xy$-এর সাথে সমান।

## বিভাগ - খ

## Differential Calculus II

### (ইউনিট - ১)

### (মান : ১৫)

***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। অনুক্রম $\left\{\frac{4n+3}{3n+4}\right\}$-এর জন্য দেখাও তা —

(ক) ক্রমবর্ধমান কিনা

(খ) উপরে নাকি নীচে সীমাবদ্ধ

(গ) অভিসারী কিনা, যুক্তি সহকারে।

৩। (ক) ব্যাখ্যা করো ঃ অলটারনেটিং শ্রেণি (Alternating series)

(খ) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+.....$ শ্রেণিটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা করো।

৪। (ক) Rolle-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(খ) '$a$'-এর মান বের করো যাতে $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^{2}}$ -এর অস্তিত্ব সসীম (exists finitely) হয় এবং এর সীমা (limit) নির্ণয় করো। ২+৩

৫। $x$-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$-এর চরম অথবা অবম মান থাকবে এবং যদি থাকে সেই মানগুলো নির্ণয় করো। ৩+২

৬। Lagrange-র 'অনির্ধারিত গুণক'-এর সাহায্যে $S = 2(xy + yz + zx)$-এর প্রান্তিক বিন্দু নির্ণয় করো, যেখানে $xyz = a^3$; অতঃপর ওই বিন্দুতে $S$-এর চরম বা অবম মান নির্ণয় করো। ৫

**বিভাগ - গ**

**Differential Equation II**

**(ইউনিট - ২)**

**(মান : ৫)**

*যে-কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭। $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0$ অবকল সমীকরণের আইগেন মানসমূহ এবং আইগেন অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করো, যেখানে $y(0)=0,\ y(a)=0,\ \lambda,\ a>0$ । ৫

৮। Lagrange-র পদ্ধতি দ্বারা সমাধান করো ঃ

$$py+qx=xyz^2\left(x^2-y^2\right),\ \text{where}\ p=\frac{\partial z}{\partial x}\ \text{and}\ q=\frac{\partial z}{\partial y}$$ ৫

**বিভাগ - ঘ**

**Vector Algebra**

**(ইউনিট - ৩)**

**(মান : ৫)**

*যে-কোনো একটি* প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, যে-কোনো ত্রিভুজ $\Delta ABC$-এর ক্ষেত্রে $c = a\cos B + b\cos A$, যেখানে চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ। ৫

১০। ধ্রুবক বল $4\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ দ্বারা $\hat{i}+2\hat{j}$ বিন্দু থেকে $2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ বিন্দুতে একটি কণার সরণ ঘটে। বলগুলি দ্বারা কার্যের পরিমাপ করো। ৫

## বিভাগ - ঙ

## Discrete Mathematics

(ইউনিট - ৪)

(মান : ৩০)

***যে-কোনো তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যা $n \geqslant 1$-এর জন্য প্রমাণ করো, $10^n + 10^{n-1} + 1$ সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য।

(খ) যদি $d \mid a$ এবং $d \mid c$, যেখানে $a, c, d$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তবে প্রমাণ করো যে, $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d}\gcd(a, c)$। ৫+৫

১২। (ক) যদি $n$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $n^3 + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $n = 1$.

(খ) নিম্নলিখিত congruence-গুলির সমস্ত সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো ঃ

$x \equiv 2 \pmod 3$

$x \equiv 3 \pmod 4$

$x \equiv 4 \pmod 5$ ৫+৫

১৩। (ক) যখন $2^{18} + 9^{18}$-কে 17 দিয়ে ভাগ করা হয়, তখন Farmet's little theorem ব্যবহার করে ভাগশেষ নির্ণয় করো।

(খ) কোন বস্তুর জন্য প্রদত্ত UPC-টি সঠিক কিনা বলো ঃ 8901030114519 ৫+৫

১৪। (ক) ছয় সদস্যের একটি Round-Robin tournament গঠন করো।

(খ) $(x+y+z)(xy+x'z)$ বুলীয় অপেক্ষকটিকে Disjunctive Normal Form (DNF)-এ রূপান্তরিত করো $x, y, z$ চলরাশিগুলির জন্য। ৫+৫

১৫। (ক) Wilson-এর উপপাদ্যটি লেখো।

$\phi(260)$ বের করো।

(খ) একটি লজিক বর্তনী নির্মাণ করো যেটি এই সত্যসারণিকে সিদ্ধ করে ঃ (২+৩)+৫

| $A$ | $B$ | $C$ | $E$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

(g) The angle between the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ is

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{3}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) None of these.

(h) When $7^{30}$ is divided by 4, the remainder will be

(i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) None of these.

(i) The Diophantine equation $9x + 6y = 1$ has

(i) only one solution (ii) two solutions

(iii) no solutions (iv) None of these.

(j) In a Boolean Algebra $(x+y)' + (x+y')'$ is equal to

(i) $y$ (ii) $x$ (iii) $x'$ (iv) $xy$.

**Group – B**

**Differential Calculus II**

**(Unit – 1)**

**(Marks : 15)**

Answer ***any three*** questions.

**2.** Consider the sequence $\left\{\frac{4n+3}{3n+4}\right\}$. Examine —

(a) whether it is monotonic increasing or decreasing

(b) whether it is bounded above or below

(c) state whether it is convergent with justification. 2+2+1

**3.** (a) Define a Alternating series.

(b) Examine the convergence of the series

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + .....$$ 2+3

**4.** (a) State Rolle's theorem.

(b) Find the value of '$a$' so that $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2}$ exists finitely and also find the limit. 2+3

**5.** Find at what values of $x$ the function $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ has maxima or minima and find the corresponding maxima or minima of the function, if exists. 3+2

6. Using the Lagrange's Method of undetermined multiplier, find the stationary point of $S = 2(xy + yz + zx)$ subject to $xyz = a^3$. Also find the maximum or minimum value of $S$ at this point. 5

**Group – C**

**Differential Equation II**

**(Unit – 2)**

**(Marks : 5)**

Answer ***any one*** question.

7. Find the eigen values and eigen functions of the differential equation

$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(a) = 0, \lambda, a > 0$. 5

8. Solve by Lagrange's method :

$py + qx = xyz^2\left(x^2 - y^2\right)$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ 5

**Group – D**

**Vector Algebra**

**(Unit – 3)**

**(Marks : 5)**

Answer ***any one*** question.

9. Prove (by vector method) that in any triangle $\Delta ABC$, $c = a \cos B + b \cos A$, symbols having usual meanings. 5

10. A particle, acted on by constant forces $4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i} + 2\hat{j}$ to $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$. Find the work done by the forces. 5

**Group – E**

**Discrete Mathematics**

**(Unit – 4)**

**(Marks : 30)**

Answer ***any three*** questions.

11. (a) Prove that 3 divides $10^n + 10^{n-1} + 1$, for all natural numbers $n \geqslant 1$.

(b) If $d \mid a$ and $d \mid c$, where $a, c, d$ are positive integers, then prove that $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right) = \frac{1}{d}\gcd(a, c)$. 5+5

12. (a) If $n$ is a positive integer such that $n^3 + 1$ is a prime number, then prove that $n = 1$.

(b) Solve the following system of congruences :

$$x \equiv 2 \pmod 3$$

$$x \equiv 3 \pmod 4$$

$$x \equiv 4 \pmod 5.$$

5+5

13. (a) Using Farmet's little theorem, find the remainder when $2^{18} + 9^{18}$ is divided by 17.

(b) Is 8901030114519 a correct UPC for some product? 5+5

14. (a) Find a Round-Robin tournament schedule for 6 teams.

(b) Express the Boolean expression $(x+y+z)(xy+x'z)$ in DNF in the variables $x$, $y$, $z$. 5+5

15. (a) State Wilson's theorem.

Find $\phi(260)$.

(b) Construct a logic circuit which would satisfy the truth table :

| $A$ | $B$ | $C$ | $E$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

(2+3)+5