2022

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-2

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

(Throughout the question paper, notations/symbols carry their usual meanings)

বিভাগ - ক

(মান - ১০)

১। সঠিক উত্তরটি বেছে লেখো ঃ ১×১০

(ক) $\{x_n\}$ অনুক্রমটি, যেখানে $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$ হল

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী

(ই) দোদুল্যমান (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(খ) $\sum u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ শ্রেণিটি

(অ) অভিসারী (আ) অপসারী

(ই) দোদুল্যমান (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(গ) Lagrange's Mean Value Theorem টি পাওয়া যাবে Cauchy's Mean Value Theorem-এর দুটি functions, $f(x)$ এবং $g(x)$ থেকে, যেখানে $g(x)$-এর সমান হবে

(অ) x^2 (আ) x

(ই) 1 (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঘ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$; অবকল সমীকরণটির সমাধান হবে

(অ) $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$ (আ) $(A + Bx)e^{-3x}$

(ই) $y = (A\cos x + B\sin x)$ (ঈ) $y = (A\cos 3x + B\sin 3x)$

(ঙ) যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর জন্য $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ হয়, তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটি

(অ) সমরেখ (Collinear) (আ) সমান্তরাল (Parallel)

(ই) অর্থোগোনাল (Orthogonal) (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(চ) বুলিয়ান বীজগণিতে $(a+b+c)' =$

(অ) $a'b'c'$ (আ) $a'+b'+c'$

(ই) $a'+(b+c)'$ (ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ছ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^x}$ -এর মান

(অ) 1 (আ) 0

(ই) -1 (ঈ) ∞

(জ) যদি $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10,\ x \in \mathbb{R}$ হয়, তাহলে

(অ) $x = 0$-তে f-এর চরম মান আছে

(আ) $x = 0$-তে f-এর অবম মান আছে

(ই) $x = 0$-তে f-এর চরম বা অবম কোনো মান নাই

(ঈ) এদের কোনোটিই নয়।

(ঝ) $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ অপেক্ষকটি থেকে $a(\neq 0)$ এবং $b(\neq 0)$ অপসারণ করলে যে আংশিক অবকল সমীকরণ পাওয়া যাবে সেটি হল

(অ) $p+q=4z$ (আ) $p^2+q^2=2z$

(ই) $p^2-q^2=4z$ (ঈ) $p^2+q^2=4z$

(ঞ) n-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে n^3+1 একটি মৌলিক সংখ্যা, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(অ) $n=1$ (আ) $n=2$

(ই) $n=3$ (ঈ) $n=5$

বিভাগ - খ

[Differential Calculus-II]

ইউনিট - ১

(মান : ১৫)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। দেখাও যে, $\{x_n\}$ অনুক্রমটি যথার্থ ক্রমহ্রাসমান যখন $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, এবং তাই (hence) প্রমাণ করো এটি অভিসারী। ৩+২

৩। (ক) $f(x) = e^{\sin x}$ অপেক্ষকটিতে $[0, \pi]$ অন্তরে Rolle's Theorem প্রয়োগ করা যাবে কি না পরীক্ষা করে দেখাও।

(খ) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$ -এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

৪। $f(x) = \sin x$-কে x-এর power-এ প্রসারিত (expand) করো এবং প্রসারণের বৈধতা দেখাও। ৫

৫। (ক) দুটি সীমাবদ্ধ অনুক্রমের উদাহরণ দাও যার একটি অভিসারী (convergent) এবং অন্যটি অপসারী (divergent) অনুক্রম।

(খ) Cauchy-এর সাধারণ পদ্ধতি ব্যবহার করে দেখাও যে, $\{x_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী যেখানে, $x_n = 1 + \dfrac{1}{\lfloor 2} + \dfrac{1}{\lfloor 3} + \ldots + \dfrac{1}{\lfloor n}$। ২+৩

৬। $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{36}{2-x}$ অপেক্ষকটির চরম ও অবম মান (যদি থাকে) নির্ণয় করো। ৫

বিভাগ - গ

[Differential Equation-II]

ইউনিট - ২

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৭। সমাধান করো ঃ $(x+a)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4(x+a)\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$। ৫

৮। আংশিক অবকল সমীকরণটি (Partial Differential Equation) সমাধান করো ঃ $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y$। ৫

বিভাগ - ঘ

[Vector Algebra]

ইউনিট - ৩

(মান : ৫)

যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৯। কোনো কণার উপর $\left(4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}\right)$ এবং $\left(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right)$ বল দুটি ক্রিয়াশীল হয়ে কণাটিকে $\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right)$ বিন্দু হতে $\left(5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সম্পাদিত কার্যের পরিমাণ নির্ণয় করো। ৫

১০। ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করো, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বগুলি সমবিন্দু। ৫

Please Turn Over

বিভাগ - ঙ

[Discrete Mathematics]

ইউনিট - ৪

(মান : ৩০)

যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। (ক) Mathematical Induction-এর সাহায্যে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)};\, n\in \mathbf{N}$$

(খ) $2x+3y=50$-এর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সমাধান (Positive integral solutions) নির্ণয় করো। ৫+৫

১২। (ক) নিম্নলিখিত সিস্টেম অফ্ কনগ্রুয়েন্স (System of Congruence)টির সমাধান করো :

$x\equiv 1 \pmod 3$

$x\equiv 2 \pmod 4$

$x\equiv 3 \pmod 5$

(খ) পাঁচ সদস্যের একটি Round-Robin tournament-এর schedule গঠন করো। ৫+৫

১৩। (ক) 7^{32}-কে 5 দিয়ে ভাগ করার পর অবশেষ কত থাকবে?

(খ) Wilson উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করো $18!+1$ সংখ্যাটি 23 দ্বারা বিভাজ্য। ৫+৫

১৪। (ক) যদি $\gcd(a,b)=1$ হয়, তবে দেখাও যে $\gcd(a+b, a^2-ab+b^2)=1$ অথবা 3।

(খ) যদি p একটি অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা হয়, প্রমাণ করো যে $1^{p-1}+2^{p-1}+3^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}\equiv -1 \pmod p$ ৫+৫

১৫। (ক) বুলীয় বীজগাণিতিক পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করো যে, $(a+b)'=a'\cdot b'$।

(খ) একটি Switching Circuit নির্মাণ করো যেটি এই বুলীয় রাশিকে প্রকাশ করে : $xyz+xyz'+xy'z+x'yz$ Circuit-টিকে সরলীকৃত করো। ৫+৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Marks : 10)

1. Choose the correct alternatives : 1×10

(a) The sequence $\{x_n\}$, where $x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$ is

(i) convergent (ii) divergent

(iii) oscillatory (iv) None of these.

(b) The series $\sum u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$

(i) convergent (ii) divergent

(iii) oscillatory (iv) None of these.

(c) Lagrange's Mean Value Theorem is obtained from Cauchy's Mean Value Theorem for two functions $f(x)$ and $g(x)$ by putting $g(x)$ is equal to

(i) x^2 (ii) x

(iii) 1 (iv) None of these.

(d) The general solution of the ordinary differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ is

(i) $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$ (ii) $(A + Bx)e^{-3x}$

(iii) $y = (A\cos x + B\sin x)$ (iv) $y = (A\cos 3x + B\sin 3x)$

(e) If for two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, then $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are

(i) Collinear (ii) Parallel

(iii) Orthogonal (iv) None of these.

(f) In a Boolean Algebra $(a + b + c)' =$

(i) $a'b'c'$ (ii) $a' + b' + c'$

(iii) $a' + (b + c)'$ (iv) None of these.

(g) The value of $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{e^x}$ is

(i) 1 (ii) 0

(iii) −1 (iv) ∞.

(h) If $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10,\ x \in \mathbb{R}$, then

(i) f has maximum at $x = 0$

(ii) f has minimum at $x = 0$

(iii) f has neither maximum nor minimum at $x = 0$

(iv) None of these.

(i) The partial differential equation obtained by eliminating the arbitrary constant $a(\neq 0)$ and $b(\neq 0)$ from the function $z = (x-a)^2 + (y-b)^2$ is

(i) $p + q = 4z$ (ii) $p^2 + q^2 = 2z$

(iii) $p^2 - q^2 = 4z$ (iv) $p^2 + q^2 = 4z$

(j) If n is a positive integer such that $n^3 + 1$ is a prime, then

(i) $n = 1$ (ii) $n = 2$

(iii) $n = 3$ (iv) $n = 5$.

Group - B

[Differential Calculus-II]

Unit - 1

(Marks : 15)

Answer ***any three*** questions.

2. If $x_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; show that the sequence $\{x_n\}$ is strictly monotonic decreasing and hence prove that it is convergent. 3+2

3. (a) Is Rolle's Theorem applicable to the function $e^{\sin x}$ in $[0, \pi]$? Justify your answer.

(b) Find the value of $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$. 3+2

4. Expand $f(x) = \sin x$ in power of x, stating the validity of the expansion. 5

5. (a) Give examples of two bounded sequences of which one is convergent and the other is divergent.

(b) Use Cauchy's general principle of convergence to prove that the sequence $\{x_n\}$, where

$x_n = 1 + \dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{1}{\underline{|3}} + \ldots + \dfrac{1}{\underline{|n}}$ is convergent. 2+3

6. Find the maximum and minimum value (if exists) of the function $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{36}{2-x}$. 5

Group - C

[Differential Equation-II]

Unit - 2

(Marks : 5)

Answer *any one* question.

7. Solve : $(x+a)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-4(x+a)\dfrac{dy}{dx}+6y=0$. 5

8. Solve the Partial Differential Equation $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y$. 5

Group - D

[Vector Algebra]

Unit - 3

(Marks : 5)

Answer *any one* question.

9. A particle being acted on by constant forces $\left(4\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}\right)$ and $\left(3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$, is displaced from the point $\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)$ to the point $\left(5\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}\right)$. Find the total work done. 5

10. Show by vector method, that the perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent. 5

Group - E

[Discrete Mathematics]

Unit - 4

(Marks : 30)

Answer *any three* questions.

11. (a) Prove by Mathematical Induction

$$\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)};\ n\in\mathbb{N}.$$

5+5

(b) Find all positive integral solutions of $2x+3y=50$.

12. (a) Solve the following system of congruences :

$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 4$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$

(b) Find a Round-Robin tournament schedule for 5 teams. 5+5

13. (a) Find the remainder when 7^{32} is divided by 5.

(b) Using Wilson theorem prove that $18! + 1$ is divisible by 23. 5+5

14. (a) If $\gcd(a, b) = 1$, then prove that $\gcd(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ or 3.

(b) If p is odd prime, then prove that $1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1} \equiv -1 \pmod p$. 5+5

15. (a) By Boolean algebraic method, prove that, $(a + b)' = a' \cdot b'$.

(b) Construct a switching circuit which represent by the Boolean expression : $xyz + xyz' + xy'z + x'yz$. Simplify the switching circuit. 5+5