

2024

## MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words  
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ ।

(খ)  $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন  $x = a \cos^3 t$  এবং  $y = b \sin^3 t$ ।

(গ)  $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$  একটি ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক হলে 'k' এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ)  $y = (\sin^{-1}x)^2$  হলে দেখাও যে  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ ।

(ঙ)  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  -এই Reduction formula ব্যবহার করে  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(চ)  $t \in [0, \pi]$  অন্তরালে,  $x = \cos 3t$ ,  $y = \sin 3t$  বক্ররেখাটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ছ)  $x^2 = 36y$  অধিবৃত্ত, Y-অক্ষ এবং  $y = 4$  সরলরেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্রের প্রথম পাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

(ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো যখন  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$ ।

(খ)  $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন  $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$ ।

Please Turn Over

(1394)

- (গ) Successive differentiation-এর উপর Leibnitz Theorem বিবৃত করো। যদি  $y = e^{-x}\cos x$  হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে  $y_4 + 4y = 0$ ।
- (ঘ)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  বক্ররেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
- (ঙ) Vectorial angle  $0$  থেকে  $\theta$  পর্যন্ত  $r = a(1+\cos\theta)$ -এই Cardioide-এর পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
- (চ) যদি  $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$  হয়, দেখাও যে  $(y_{10})_0 = 2^{10}$ ।

## বিভাগ - খ

## [Geometry]

(Marks : 35)

৩। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

 $২\frac{1}{2} \times ২$ 

- (ক) কত ডিগ্রি কোণে অক্ষগুলিকে ঘোরালে  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  সমীকরণ থেকে  $xy$  পদটিকে তাড়ানো যাবে তা নির্ণয় করো।
- (খ)  $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$  শঙ্কুটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং ওর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
- (গ) যে গোলকটির একটি ব্যাসের দুটি প্রান্তবিন্দু  $(3, 4, -2)$  এবং  $(-1, 3, 2)$  তার সমীকরণটি নির্ণয় করো।
- (ঘ)  $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$  একটি কেন্দ্রবিহীন শঙ্কুচ্ছেদ (Conic) হলে  $k$ -এর মান নির্ণয় করো।

৪। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

 $৬ \times ৫$ 

- (ক)  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$  সমীকরণটিকে তার Canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং Conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।
- (খ)  $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$  সরলরেখাটি যদি  $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$  শঙ্কুচ্ছেদটিকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে  $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$ ।
- (গ)  $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$  বিন্দুতে  $xy = c^2$  পরাবৃত্তটির অভিলম্ব যদি  $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$  বিন্দুগামী হয়, তাহলে দেখাও যে  $t_1^3 t_2 + 1 = 0$ ।
- (ঘ)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তটির দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারণপথটি নির্ণয় করো।
- (ঙ) একটি  $r$  ব্যাসার্ধের গোলক মূলবিন্দু  $(0, 0)$  দিয়ে যায় এবং অক্ষগুলিকে  $P, Q, R$  বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে এই  $PQR$  ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের সঞ্চারণপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (চ) শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু  $(1, 1, 3)$  এবং বক্ররেখার ভিত্তি  $x^2 + 2y^2 = 1, z = 4$ ।

- (ছ) যে Cylinder-এর generator গুলি  $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  সরলরেখার সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখা  $x^2 + 4y^2 = 9, z = 1$  তার সমীকরণ লেখো।
- (জ)  $4x^2 - y^2 = 8z$  — এই Paraboloid-টির সেই সমস্ত generating line-এর সমীকরণ নির্ণয় করো যেগুলি  $(-3, 2, 4)$  বিন্দুগামী।
- (ঝ) দেখাও যে  $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$  সমীকরণটি একটি Central Conicoid হয়। এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

## বিভাগ - গ

## [Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

- (ক)  $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ -এর মান নির্ণয় করো, যখন  $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{\beta} = 3\hat{i} - \hat{k}, \vec{\gamma} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ ।
- (খ) প্রমাণ করো যে,  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ।
- (গ)  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$  ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লেখো যা  $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$  বিন্দুগামী।
- (ঘ)  $8\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$  এবং  $4\hat{i} + b\hat{j} + 4\hat{k}$  ভেক্টরগুলি সমরেখ হলে  $a$  এবং  $b$ -এর মান নির্ণয় করো।
- (ঙ)  $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$  ভেক্টর বরাবর একটি চলমান বস্তুর কার্য নির্ণয় করো, যেখানে প্রযুক্ত বল হল  $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ।
- (চ) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার শীর্ষবিন্দুগুলি হল  $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  এবং  $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ।
- (ছ)  $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t\hat{k}$  হলে  $\left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|$ -এর মান নির্ণয় করো।

৬। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

- (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দু দুটির সংযোগকারী রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হবে।
- (খ)  $(-2, 6, -6); (-3, 10, -9)$  এবং  $(-5, 0, -6)$  বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (গ)  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  এবং  $\vec{\gamma}$  ভেক্টরগুলি সমতলীয় না হলে দেখাও যে  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = -2[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ ।
- (ঘ)  $x = 2t^2, y = t^2 - 4t, z = 3t - 5$  এই বক্ররেখা বরাবর একটি কণা গতিশীল। তাহলে সময় যখন  $t = 1$ , কণার গতিবেগ ও ত্বরণের components গুলি নির্ণয় করো।

Please Turn Over

(ঙ)  $\vec{P}(4, 2, 1)$  বলটি  $A(5, 2, 4)$  বিন্দুর উপর প্রয়োগ হলে  $B(3, -1, 3)$  বিন্দুকে কেন্দ্র করে  $\vec{P}$ -এর টর্ক নির্ণয় করো এবং Magnitude নির্ণয় করো।

(চ)  $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$  হলে  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ -এর মান নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer **any four** questions :

2×4

(a) Find the value of  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ .

(b) Find  $\frac{dy}{dx}$ , when  $x = a \cos^3 t$  and  $y = b \sin^3 t$ .

(c) Find the values of  $k$  in order that  $f(x) = (k^2 - 5k + 18)x + x^3 + 6x^2$  is a decreasing function.

(d) If  $y = (\sin^{-1}x)^2$ , then show that  $(1 - x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ .

(e) Evaluate  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \, dx$  using the reduction formula,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

(f) Find the arc length of the curve,  $x = \cos 3t$ ,  $y = \sin 3t$  over the interval  $t \in [0, \pi]$ .

(g) Find the area in the first quadrant included between the parabola  $x^2 = 36y$ , the  $Y$ -axis and the line  $y = 4$ .

2. Answer **any three** questions :

4×3

(a) Find the values of  $a$  and  $b$  in order that  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$ .

(b) Find  $\frac{dy}{dx}$  when  $\tan^{-1} \frac{y}{x} = \log(x^2 + y^2)$ .

(c) State Leibnitz Theorem on successive differentiation. If  $y = e^{-x} \cos x$ , then prove that  $y_4 + 4y = 0$ .

(5)

**B(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF**

- (d) Find the area enclosed by the curve,  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .
- (e) Find the length of the arc of the cardioid  $r = a(1 + \cos\theta)$  from the vectorial angle 0 to  $\theta$ .
- (f) If  $y = 2\cos x(\sin x - \cos x)$ , show that  $(y_{10})_0 = 2^{10}$ .

**Group - B**

**[Geometry]**

**(Marks : 35)**

3. Answer **any two** questions : 2½×2
- (a) Find the angle through which the axes be turned to remove the term  $xy$  from the equation,  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .
- (b) Determine the nature of the conic,  $\frac{3}{r} = 2 + 4\cos\theta$  and also find the length of its latus rectum.
- (c) Find the equation of the sphere whose extremities of a diameter are  $(3, 4, -2)$  and  $(-1, 3, 2)$ .
- (d) Find the value of  $k$  for which the equation,  $kx^2 + 8xy + 4y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$  represents a conic without any centre.
4. Answer **any five** questions : 6×5
- (a) Reduce the equation,  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16x + 20 = 0$  to its canonical form and determine the nature of the conic.
- (b) If the straight line,  $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$  touches the conic,  $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ , then show that  $(lA - e)^2 + l^2B^2 = 1$ .
- (c) If the normal to the hyperbola,  $xy = c^2$  at the point  $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$  meet it again at  $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ , then show that  $t_1^3 t_2 + 1 = 0$ .
- (d) Find the equation of the locus of the points of intersection of mutually perpendicular tangents to the ellipse,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
- (e) A sphere of radius  $r$  passes through the origin  $(0, 0)$  and touches the axes in  $P, Q, R$ . Find the locus of the centroid of the triangle  $PQR$ .
- (f) Find the equation of the cone with vertex  $(1, 1, 3)$  and guiding curve  $x^2 + 2y^2 = 1, z = 4$ .

**Please Turn Over**

**(1394)**

(g) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line,  $\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  and the guiding curve is the ellipse,  $x^2 + 4y^2 = 9, z = 1$ .

(h) Find the equations of the generating lines of the paraboloid  $4x^2 - y^2 = 8z$  passing through the point  $(-3, 2, 4)$ .

(i) Show that the quadric surface given by the equation

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$$

is a central conicoid. Find its centre.

### Group - C

#### [Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer **any four** questions :

2×4

(a) If  $\vec{\alpha} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{\beta} = 3\hat{i} - \hat{k}, \vec{\gamma} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$ , find  $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ .

(b) Prove that  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ .

(c) Find the vector equation of the line passing through the point,  $-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$  and parallel to the vector,  $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ .

(d) Find the values of  $a$  and  $b$  for which the vectors  $8\hat{i} - 3\hat{j} + a\hat{k}$  and  $4\hat{i} + b\hat{j} + 4\hat{k}$  are collinear.

(e) Find the work-done in moving an object along a vector  $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$  if the applied force is  $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ .

(f) Find the area of the triangle having vertices at  $\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  and  $-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ .

(g) If  $\vec{r} = \sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + t \hat{k}$ , then find the value of  $\left| \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|$ .

6. Answer **any three** questions :

4×3

(a) Show by vector method that the line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and half of its length.

(b) Find the vector equation of a plane through the three points  $(-2, 6, -6); (-3, 10, -9)$  and  $(-5, 0, -6)$ .

(c)  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  and  $\vec{\gamma}$  are three non-coplanar vectors, then show that  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} - \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) = -2[\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ .

(7)

**B(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF**

- (d) A particle moves along the curve  $x = 2t^2$ ,  $y = t^2 - 4t$ ,  $z = 3t - 5$ . Find the components of velocity and acceleration at time  $t = 1$ .
- (e) Find the torque about the point  $B(3, -1, 3)$  of a force  $\vec{P}(4, 2, 1)$  passing through the point  $A(5, 2, 4)$ . Find the magnitude of the torque.

(f) If  $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ , then find  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ .

---