2025

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-B-1

(Advanced Calculus)

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১। সঠিক উত্তরটি লেখো ঃ ১×১০

(ক) $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি, যেখানে $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $0 \le x < 1$,

(অ) সমভাবে [0, 1] অন্তরালে অভিসারী হবে

(আ) অসমভাবে [0, 1] অন্তরালে অভিসারী হবে

(ই) [0, 1] অন্তরালে অপসারী হবে

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(খ) যদি $\sum \dfrac{\cos nx}{n^{p+1}}$ শ্রেণিটি সমভাবে x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য অভিসারী হয়, তাহলে $p =$

(অ) -1 (আ) 0

(ই) 1 (ঈ) কোনোটিই নয়।

(গ) $\sum nx^{n-1}$ ঘাত শ্রেণিটির অভিসারী অন্তরাল ঃ

(অ) $(-2, 2)$ (আ) $(-e, e)$

(ই) $(-1, 1)$ (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) ঘাত শ্রেণি $x + \dfrac{2^2x^2}{2!} + \dfrac{3^3x^3}{3!} + \ldots$-এর অভিসরণ ব্যাসার্ধ হল

(অ) 1 (আ) -1

(ই) e (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঙ) যদি $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$ অপেক্ষকটি Fourier শ্রেণিতে $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$-রূপে প্রকাশিত হয়, তাহলে a_0-এর মান হবে

(অ) $\frac{\pi}{2}$ (আ) π

(ই) 2π (ঈ) 0।

(চ) $\sin 2x$ অপেক্ষকটির পর্যায়কাল হল

(অ) π (আ) 2π

(ই) $\frac{\pi}{2}$ (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ছ) $L\{\cos h\,(ax)\} =$

(অ) $\frac{a}{s^2 - a^2}$ (আ) $\frac{a}{s^2 + a^2}$

(ই) $\frac{s}{s^2 - a^2}$ (ঈ) $\frac{s}{s^2 + a^2}$।

(জ) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} =$

(অ) e^{3t} (আ) te^{3t}

(ই) te^{-3t} (ঈ) e^{-3t}।

(ঝ) Laplace transform-এর সাহায্যে আমরা

(অ) শুধুমাত্র initial value problem সমাধান করতে পারি

(আ) শুধুমাত্র boundary value problem সমাধান করতে পারি

(ই) initial value এবং boundary value উভয় সমাধান করতে পারি

(ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঞ) একটি অযুগ্ম অপেক্ষকের Fourier শ্রেণিতে শুধুমাত্র থাকবে

(অ) cosine terms (আ) sine terms

(ই) sine এবং cosine উভয় terms (ঈ) কোনোটিই নয়।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৩

(ক) $x + \frac{(2!)^2}{4!}x^2 + \frac{(3!)^2}{6!}x^3 + \ldots$ ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(খ) $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটির Limit অপেক্ষক নির্ণয় করো, যেখানে

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\ x \in [0,1].$$

(গ) $f(x) = x$ অপেক্ষকটিকে $0 < x < 2$ অন্তরালে half-range Fourier cosine শ্রেণিতে বিস্তৃত করো।

(ঘ) $f(t)$ অপেক্ষকের Laplace transform নির্ণয় করো, যেখানে $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1 \\ t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$

(ঙ) $L^{-1}\left\{\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$-এর মান নির্ণয় করো।

৩। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) (অ) প্রমাণ করো, অনুক্রম $\{f_n\}$ যেখানে $f_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ বিন্দু অনুযায়ী শূন্যর দিকে অভিসারী [0, 1] অন্তরালে কিন্তু সমভাবে নয়।

(আ) $\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটির Limit অপেক্ষক নির্ণয় করো, যেখানে $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ on [0, 2]।

$\{f_n(x)\}$ অপেক্ষকের অনুক্রমটি কি [0, 2] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও। (২+৩)+(২+৩)

(খ) (অ) ঘাতশ্রেণি সংক্রান্ত Abel-এর উপপাদ্যটি Limit form-এ বিবৃত করো।

(আ) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, |x| < 1$, এই ঘাত শ্রেণি বিবৃতিটি ধরে নিয়ে দেখাও যে,

$log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,\ -1 < x < 1$, অতঃপর Abel's theorem ব্যবহার করে

দেখাও যে, $\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ২+(৫+৩)

(গ) (অ) অপেক্ষক শ্রেণির সমভাবে অভিসারী হওয়ার জন্য Weierstrass' M-test-টি বিবৃত করো।

দেখাও যে, $(-\infty\ ,\ \infty)$ অন্তরালে $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ শ্রেণিটি সমভাবে অভিসারী হবে।

(আ) প্রমাণ করো যে, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $0 \leqslant x < 1$, এই শ্রেণিটি $[\,0,\ 1\,)$ অন্তরালে বিন্দু অনুযায়ী অভিসারী হবে, কিন্তু $[\,0,\ 1\,)$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে না। (২+৩)+৫

(ঘ) $f(x) = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার কোসাইন শ্রেণি নির্ণয় করো এবং

দেখাও যে $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$. ৭+৩

(ঙ) (অ) প্রমাণ করো যে, $L\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\dfrac{1}{S}$ । অতঃপর $L\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(আ) মান নির্ণয় করো ঃ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)\,(s^2+b^2)}\right\},\ a^2 \neq b^2.$ (৩+২)+৫

(চ) (অ) দেওয়া আছে $L\,\{F(t)\} = f(p)$, দেখাও যে, $L\ \{e^{at}\,F(t)\} = f(p-a)$ এবং $L\ \{e^{2t}\cos t\}$ নির্ণয় করো।

(আ) Laplace transform ব্যবহার করে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0;\ y\,(0) = 0,\ y\,(1) = 2.$$ ৫+৫

(ছ) (অ) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}$-এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $L\{f(t)\} = F(s)$.

(আ) Laplace transform-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত অবকল সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin 3t;\ y\,(0) = 0 = y'\,(0).$$ ৪+৬

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

1. Write the correct answer : 1×10

(a) The sequence of functions $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $0 \le x < 1$ is

(i) uniformly convergent on [0, 1] (ii) not uniformly convergent on [0, 1]

(iii) divergent on [0, 1] (iv) none of these.

(b) If the series $\sum \dfrac{\cos nx}{n^{p+1}}$ is uniformly convergent for all real values of x, then $p =$

(i) -1 (ii) 0

(iii) 1 (iv) none of these.

(c) The interval of convergence of the power series $\sum nx^{n-1}$ is

(i) $(-2, 2)$ (ii) $(-e, e)$

(iii) $(-1, 1)$ (iv) none of these.

(d) The radius of convergence of the power series $x + \dfrac{2^2 x^2}{2!} + \dfrac{3^3 x^3}{3!} + \ldots$ is

(i) 1 (ii) -1

(iii) e (iv) none of these.

(e) If $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ be presented in Fourier series as

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

then the value of a_0 will be

(i) $\dfrac{\pi}{2}$ (ii) π

(iii) 2π (iv) 0.

(f) The period of $\sin 2x$ is

(i) π (ii) 2π

(iii) $\dfrac{\pi}{2}$ (iv) none of these.

(g) $L\{\cos h\,(ax)\} =$

(i) $\dfrac{a}{s^2 - a^2}$ (ii) $\dfrac{a}{s^2 + a^2}$

(iii) $\dfrac{s}{s^2 - a^2}$ (iv) $\dfrac{s}{s^2 + a^2}$.

(h) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} =$

(i) e^{3t} (ii) te^{3t}

(iii) te^{-3t} (iv) e^{-3t}

(i) Using Laplace transform, we can solve

(i) only initial value problem

(ii) only boundary value problem

(iii) both initial and boundary value problem

(iv) none of the above.

(j) The Fourier series of an odd function contains only

(i) cosine terms (ii) sine terms

(iii) both sine and cosine terms (iv) none of these.

2. Answer ***any three*** questions : 5×3

(a) Find the radius of convergence of the power series :

$$x + \frac{(2!)^2}{4!}x^2 + \frac{(3!)^2}{6!}x^3 + \ldots$$

(b) Find the limit function of the sequence of functions $\{f_n(x)\}$,

where $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}},\ x \in [0, 1]$.

(c) Expand the function $f(x) = x,\ 0 < x < 2$ in a half-range Fourier cosine series.

(d) Find the Laplace transform of the function $f(t)$, where

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le 1 \\ t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

(e) Evaluate $L^{-1}\left\{\log\left(1 + \dfrac{1}{s^2}\right)\right\}$.

3. Answer ***any four*** questions :

(a) (i) Prove that the sequence $\{f_n\}$ where $f_n(x) = n\,x\,e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ converges pointwise to zero on [0, 1] but not uniformly.

(ii) Find the limit function of the sequence of functions $\{f_n(x)\}$,

where $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ on [0, 2].

Does the sequence $\{f_n(x)\}$ converge uniformly on [0, 2]? Justify your answer.

(2+3)+(2+3)

(b) (i) State Abel's theorem on Power Series in Limit form.

(ii) Assuming the power series expansion for $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, $|x| < 1$, show that,

$log_e(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$, $-1 < x < 1$. By using Abel's theorem deduce

that, $\log_e 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$. 2+(5+3)

(c) (i) State Weierstrass' M-test for uniform convergence of series of functions. Show that, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ is uniformly convergent on $(-\infty, \infty)$.

(ii) Prove that, the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $0 \leqslant x < 1$ is pointwise convergent on [0, 1), but not uniformly convergent on [0, 1). (2+3)+5

(d) Find the Fourior cosine series for $f(x) = \sin x$ in $0 \leqslant x \leqslant \pi$ and

hence show $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$. 7+3

(e) (i) Prove that, $L\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\dfrac{1}{S}$.

Hence evaluate $L\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\}$.

(ii) Evaluate $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, a^2 \neq b^2$. (3+2)+5

(f) (i) If $L\{F(t)\} = f(p)$, then show that $L\{e^{at}F(t)\} = f(p-a)$.

Hence find $L\{e^{2t}\cos t\}$.

(ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = 0; \text{ given that } y(0) = 0,\ y(1) = 2.$$ 5+5

(g) (i) Evaluate $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\left(s^2+1\right)}\right\}$, where $L\{f(t)\} = F(s)$.

(ii) Using Laplace transform, solve the following differential equation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin 3t; \text{ given that } y(0) = 0 = y'(0).$$ 4+6