2025

MATHEMATICS — MDC

Paper : MN-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

$\mathbb{Z}$ — Set of integers, $\mathbb{R}$ — Set of real numbers, $\mathbb{R}$ — Set of rational numbers, $\mathbb{N}$ — Set of natural numbers.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) যদি $z = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$ হয়, তবে $\frac{1}{z}$ এর মান নির্ণয় করো।

(খ) $1, -\frac{1}{2}, 5$ বীজ সম্পন্ন সমীকরণটি নির্মাণ করো।

(গ) যদি a, b, c ধনাত্মক এবং সব কটি সমান না হয়, তবে দেখাও যে $(b + c)(c + a)(a + b) > 8abc$।

(ঘ) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ এর বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকিবার শর্ত নির্ণয় করো।

২। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) যদি x-এর মান বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে, $i\log\frac{1+ix}{1-ix} = -2\tan^{-1}x.$

(খ) এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করো যার বীজগুলির মান $x^3 + 3x^2 - 8x + 1 = 0$-এর বীজগুলির মানের থেকে 4 কম।

(গ) কার্ডনের পদ্ধতিতে সমাধান করো ঃ $x^3 - 12x + 65 = 0.$

(ঘ) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ সমীকরণটির দুটি বীজ সমান হলে, সমীকরণটিকে সমাধান করো।

(ঙ) ধনাত্মক বাস্তব চলক x, y, z যদি $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ শর্তটিকে মান্য করে, তবে প্রমাণ করো যে, $x^2 + y^2 + z^2$-এর সর্বনিম্ন মান হল 27।

(চ) সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো, $\sin z = 2$, z একটি জটিল রাশি।

(ছ) যদি α, β, γ, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের বীজগুলি হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় করো যার বীজগুলি হল, $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$.

বিভাগ - খ

(মান : ২৫)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) দেখাও যে, $19^{20} \equiv 1 \pmod{181}$.

(খ) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2a + 3b, 5 \text{ দ্বারা বিভাজিত}\}$

সম্পর্কটি $\mathbb{Z}$ পূর্ণ সংখ্যার সেট্-এ সংজ্ঞাত। পরীক্ষা করো এটি একটি তুল্য সম্পর্ক কি না (equivalence relation)।

(গ) ম্যাথম্যাটিক্যাল ইনডাক্সন-এর দ্বারা প্রমাণ করো, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্।

(ঘ) দুটি পূর্ণ সংখ্যা u এবং v বাহির করো, যেখানে $63u + 55v = 1$.

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) দেখাও যে, $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ সংজ্ঞাত অপেক্ষকটি surjective কিন্তু injective নয়। ৫

(খ) প্রমাণ করো পরপর তিনটি পূর্ণ সংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য। ৫

(গ) প্রমাণ করো যে, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, যেখানে $f(x) = 5x + 2$ $(x \in \mathbb{Q})$ অপেক্ষকটি এক থেকে এক এবং সার্বিক হবে। ৩+২

(ঘ) ম্যাথম্যাটিক্যাল ইনডাক্সন নীতি অনুসারে প্রমাণ করো $5^{2n} - 1$, 24 দ্বারা বিভাজ্য। ৫

(ঙ) নিম্নলিখিত প্রতিটি সমীকরণ সমাধান করো এবং যুগপত সমীকরণটিরও সমাধান করো ঃ ৫

$x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{4}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$.

(চ) $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a - b| \leq 3\}$ সম্পর্কটি পূর্ণ সংখ্যার সেট-এর উপর $\mathbb{Z}$ equivalence, পরীক্ষা করো। ৫

(ছ) যদি $n > 3$ এবং n পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো, n, $n + 2$, $n + 4$ সকলে মৌলিক হতে পারবে না। ৫

বিভাগ - গ

(মান : ২৫)

৫। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) $\alpha = (1, 1, 2)$, $\beta = (0, 2, 1)$, $\gamma = (2, 2, 4)$ হলে α-কে β এবং γ-এর রৈখিক যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যাবে কি না, নির্ণয় করো।

(খ) k-এর কোন মানের জন্য $\{(1, 2, 1), (k, 3, 1), (2, k, 0)\}$ সেট্‌টি রৈখিকভাবে স্বাধীন $\mathbb{R}^3$ সেট্‌-এর উপর?

(গ) একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স A নির্ণয় করো যাতে

$$A\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

(ঘ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 21 & 14 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$ -এর ক্রমাঙ্ক (rank) নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = b$, $5x + 7y + az = b^2$ সমীকরণগুলির কী শর্তে (অ) শুধুমাত্র একটি সমাধান থাকবে (আ) কোনো সমাধান থাকবে না (ই) একের অধিক সমাধান থাকবে।

(খ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ -এর row echelon form বের করো এবং এর ক্রমাঙ্ক (rank) নির্ণয় করো।

(গ) দেখাও যে সমীকরণগুলি

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - y + 2z = 1$$
$$2x - 2y + 3z = 2$$
$$x - y + z = -1$$

সামঞ্জস্যপূর্ণ হবে।

(ঘ) দেখাও যে $\mathbb{R}^3$-এর সাবসেট্‌ $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathbb{R}^3$-কে বিস্তার করে।

(ঙ) $2x - 3y + z = 1$, $x + 2y - 3z = 4$, $4x - y - 2z = 8$ সমীকরণগুলিকে $AX = B$ আকারে প্রকাশ করো এবং ম্যাট্রিক্সের ধর্ম ব্যবহার করে সমাধান করো।

(চ) যদি A এবং B স্কয়ার ম্যাট্রিক্স হয় একই ক্রমের তাহলে প্রমাণ করো, $A(A + B)^{-1} B = B(A + B)^{-1} A$, যেখানে A, B এবং $(A + B)$ সকলে ইনভারটিবেল এবং A^{-1} হল A ম্যাট্রিক্সের ইনভার্স।

(ছ) $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ -এর রৈখিক সমাহারে প্রকাশ করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Marks : 25)

1. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) If $z = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$, then find $\frac{1}{z}$.

(b) Form the equation whose roots are $1, -\frac{1}{2}, 5$.

(c) Show that $(b + c)(c + a)(a + b) > 8abc$, if a, b, c are positive and not all equal.

(d) Find the condition that the $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ should have roots in geometric progression.

2. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) If x is real, prove that $i\log\frac{1+ix}{1-ix} = -2\tan^{-1}x$.

(b) Find the equation whose roots are the roots of the equation $x^3 + 3x^2 - 8x + 1 = 0$, each diminished by 4.

(c) Solve by Cardan's method, $x^3 - 12x + 65 = 0$.

(d) Solve the equation, $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, two roots being equal.

(e) Prove that the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ is 27, where x, y, z are positive real variables satisfying the condition $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

(f) Find the general solution of $\sin z = 2$, where z is a complex number.

(g) If α, β, γ be the roots of the equation, $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, then find the equation whose roots are $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$.

Group - B

(Marks : 25)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Prove that $19^{20} \equiv 1 \pmod{181}$.

(b) A relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2a + 3b$ is divisible by $5\}$ is defined on $\mathbb{Z}$, the set of all integers. Examine if it is an equivalence relation on $\mathbb{Z}$.

(c) Use the principle of mathematical induction to prove that $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ for all $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ is the set of all natural numbers.

(d) Find two integers u and v satisfying $63u + 55v = 1$.

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$ is surjective but not injective. 5

(b) Prove that, product of any three consecutive integers is divisible by 6. 5

(c) Show that the function, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, where $f(x) = 5x + 2$ ($x \in \mathbb{Q}$) is both one-one and onto. 3+2

(d) Prove that $5^{2n} - 1$ is divisible by the 24 by the principle of mathematical induction. 5

(e) Find the solution of each of the following equations and also the simultaneous equation,
$x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 4$, $x \equiv 3 \pmod 7$. 5

(f) Examine if the following relations S on the set $\mathbb{Z}$ of all integers are equivalence relation :
$S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a - b| \leq 3\}$ 5

(g) Prove that for $n > 3$, the integers n, $n + 2$, $n + 4$ cannot be all primes. 5

Group - C

(Marks : 25)

5. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) If $\alpha = (1, 1, 2)$, $\beta = (0, 2, 1)$, $\gamma = (2, 2, 4)$, determine whether α is a linear combination of β and γ.

(b) Determine k so that the set $\{(1, 2, 1), (k, 3, 1), (2, k, 0)\}$ becomes linearly independent in $\mathbb{R}^3$.

(c) Find a 2×2 matrix A, such that $A \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 7 & 21 & 14 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$.

6. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Determine the condition for which the system, $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = b$, $5x + 7y + az = b^2$ has (i) unique solution, (ii) no solution, (iii) infinite many solutions.

(b) Reduce the following matrix to row echelon form, and find the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) Show that the equations,

$$x + 2y - z = 3$$
$$3x - y + 2z = 1$$
$$2x - 2y + 3z = 2$$
$$x - y + z = -1$$

are consistent.

(d) Show that the subset $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ of $\mathbb{R}^3$ spans $\mathbb{R}^3$.

(e) Transform the system of linear equations $2x - 3y + z = 1$, $x + 2y - 3z = 4$, $4x - y - 2z = 8$ to a matrix equation, $AX = B$ and hence solve the system using the properties of matrix.

(f) If A and B are square matrices of the same order such that A, B and $(A + B)$ are invertible. Prove that $A(A + B)^{-1} B = B(A + B)^{-1} A^{-1}$, where A is inverse matrix A.

(g) Write the matrix $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ as a linear combination of the matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.