2025

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

১। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $২^{১}/_{২}\times২$

(ক) $-i$-এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

(খ) $2x^3+x^2-2x-1=0$-এর তিনটি বীজ যথাক্রমে α,β,γ হলে $\sum\alpha^2$ -এর মান নির্ণয় করো।

(গ) ডেকার্টের নিয়মের সাহায্যে $x^4+x^2+x-1=0$ সমীকরণটির বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি a, b, c ও d ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে $(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq 16abcd$।

২। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) x যদি বাস্তব সংখ্যা হয়, প্রমাণ করো যে $i\log\frac{1+ix}{1-ix}=-2\tan^{-1}x$।

(খ) α,β যদি $t^2+2t+4=0$ সমীকরণের বীজ হয় এবং m যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে $\alpha^m+\beta^m=2^{m+1}\cos\frac{2m\pi}{3}$।

(গ) একটি সমীকরণ নির্ণয় করো যার বীজগুলি $x^3+3x^2-8x+1=0$ সমীকরণের বীজগুলির থেকে যথাক্রমে 1 বেশি।

(ঘ) $x^3-6x-4=0$ সমীকরণটি কার্ডনের পদ্ধতি অনুযায়ী সমাধান করো।

(ঙ) $x^3-px-q=0$ সমীকরণটির বীজ α,β,γ হলে $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\times\left(\beta^2+\gamma^2\right)\times\left(\gamma^2+\alpha^2\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

(চ) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$ সমীকরণটি ফেরারির পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো।

(ছ) যদি $a_1, a_2,\ldots,a_n$ অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় এবং যদি সমান্তর প্রগতিতে থাকে তাহলে প্রমাণ করো যে

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}.$$

Please Turn Over

বিভাগ - খ

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $২^{১}/_{২} \times ২$

(ক) পূর্ণ সংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$-এ R একটি সম্পর্ক, যার সংজ্ঞা হল ঃ $a\ R\ b$ iff ab একটি পূর্ণবর্গসংখ্যা। R কি সমতা সম্পর্ক? ন্যায্যতা প্রতিপাদন করো।

(খ) যদি একটি অপেক্ষক $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এভাবে সংজ্ঞাত হয় যে, $f(x) = x^2 + 1$, তাহলে $f^{-1}(17)$-এর মান নির্ণয় করো।

(গ) Congruence সম্পর্ক ব্যবহার করে 3^{100}-এর এককের অঙ্কটি (unit digit) নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয়, তাহলে $\phi(p)$-এর মান নির্ণয় করো।

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) Chinese remainder theorem ব্যবহার করে সমাধান করা ঃ ৫

$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$
$$x \equiv 5 \pmod 8$$

(খ) গাণিতিক আবেশনের নীতিমালা ব্যবহার করে দেখাও যে $(10^{2n-1} + 1)$-এটি 11 দ্বারা বিভাজ্য $\forall n \in \mathbb{N}$। ৫

(গ) Euclidean algorithm ব্যবহার করে পূর্ণসংখ্যা u এবং v-এর মান নির্ণয় করো যেখানে $\gcd(20, 63) = 20u + 63v$। ৫

(ঘ) যদি p এবং $p^2 + 8$ মৌলিক সংখ্যা হয়, প্রমাণ করো $p = 3$। ৫

(ঙ) নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলি কি আংশিক ক্রম? ন্যায্যতা প্রতিপাদন করো ঃ ২+৩

(অ) R on $\mathbb{Z}$: $a\ R\ b$ iff $a < b$

(আ) ρ on $\mathbb{Z}$: $a\ \rho\ b$ iff $a \le b$।

(চ) দেখাও যে $f: \mathbb{R} \to (1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ ইন্‌জেক্টিভ ম্যাপিং নয় ও সার্জেক্টিভ ম্যাপিং নয়। ৫

(ছ) যদি $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ হয় এবং $f: A \to B$ এভাবে সংজ্ঞাত যে $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$, $\forall x \in A$ হয়, তাহলে f^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে কিনা যুক্তিসহ নির্ণয় করো। ৫

বিভাগ - গ

৫। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $২^{১}/_{২} \times ২$

(ক) একটি non-null ম্যাট্রিক্স A বার করো যাতে $A^2 = 0$, যেখানে 0 হল 2×2 জিরো (zero) ম্যাট্রিক্স।

(খ) k-এর কোন্ মানের জন্য the system of equations $kx + y + z = 1$, $x + ky + z = 1$, $x + y + kz = 1$-এর একটিমাত্র (unique) সমাধান থাকবে?

(গ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$-এই ম্যাট্রিক্সের র‍্যাঙ্ক কি α ও β-র উপর নির্ভরশীল? যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

(ঘ) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ হল একটি Vector space over $\mathbb{R}$। প্রমাণ করো

$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ হল V-এর একটি subspace।

৬। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$-এই ম্যাট্রিক্সের সমতুল্য Echelon রূপ নির্ণয় করো।

(খ) প্রমাণ করো n vectors-এর থেকে বেশি vectors-এর set রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent) যেখানে vector space-এর dimension n।

(গ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix}$। k-এর মান বার করো যাতে $AB = BA$ হয়।

(ঘ) কোন শর্তে the system $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = b$, $5x + 7y + az = b^2$-এর (অ) একটিমাত্র সমাধান (unique solution) থাকবে, (আ) কোনো সমাধান নেই (no solution), (ই) অসংখ্য সমাধান (many solutions) থাকবে?

(ঙ) $\{(2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$-কে $\mathbb{R}^3$-র বেসিসে প্রসারিত করো।

(চ) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ হলে, $A + A^2 + A^3$-এর rank বার করো।

(ছ) $\mathbb{R}^3$-র উপসেট্ W, যেখানে $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, এর স্বাধীন ভেক্টরগুলি বের করো।

Please Turn Over

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

1. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the cube roots of $-i$.

(b) If α, β, γ are the roots of the equation $2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, then find the value of $\sum \alpha^2$.

(c) Find the nature of roots of the equation $x^4 + x^2 + x - 1 = 0$ using Descarte's Rule of signs.

(d) If a, b, c, d are positive real numbers then, prove that $(a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 16abcd$.

2. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) If x is real, prove that $i \log \frac{1+ix}{1-ix} = -2\tan^{-1} x$.

(b) If α, β are the roots of the equation $t^2 + 2t + 4 = 0$ and m is a positive integer, prove that $\alpha^m + \beta^m = 2^{m+1} \cos \frac{2m\pi}{3}$.

(c) Find the equation whose roots are the roots of the equation $x^3 + 3x^2 - 8x + 1 = 0$, each increased by 1.

(d) Solve : $x^3 - 6x - 4 = 0$ by Cardan's Method.

(e) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 - px - q = 0$, find the value of $\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \times \left(\beta^2 + \gamma^2\right) \times \left(\gamma^2 + \alpha^2\right)$.

(f) Solve the equation by Ferrari's method $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

(g) If $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are unequal positive real numbers in A.P., show that $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} > \frac{2n}{a_1 + a_n}$.

Group - B

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) R is a relation on the set of integers $\mathbb{Z}$ defined by : $a\,R\,b$ iff ab is a perfect square. Is R an equivalence relation? Justify.

(b) If the function $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = x^2 + 1$, then find $f^{-1}(17)$.

(c) Use congruence to find the unit digit in 3^{100}.

(d) If p be a prime number, then find the value of $\phi(p)$.

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Solve the system of linear congruences by Chinese remainder theorem. 5

$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$
$$x \equiv 5 \pmod 8$$

(b) Using principle of Mathematical Induction, prove that $(10^{2n-1} + 1)$ is divisible by 11 $\forall n \in \mathbb{N}$. 5

(c) Use Euclidean algorithm to find integers u and v such that $\gcd(20, 63) = 20u + 63v$. 5

(d) If p and $p^2 + 8$ are both prime numbers, then prove that $p = 3$. 5

(e) Are the following relations partial order? Justify :

(i) Relation R on $\mathbb{Z}$ defined by $a\,R\,b$ iff $a < b$

(ii) Relation ρ on $\mathbb{Z}$ defined by $a\,\rho\,b$ iff $a \le b$. 2+3

(f) Show that $f : \mathbb{R} \to (1,1), f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ is neither injective nor surjective mapping. 5

(g) Let $A = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}, B = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ and $f : A \to B$ is defined by $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}, \forall x \in A$. Does f^{-1} exist? Justify your answer. 5

Group - C

5. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find a non-null matrix A such that $A^2 = 0$, where 0 is the 2×2 zero matrix.

(b) For what values of k the system of equations $kx + y + z = 1$, $x + ky + z = 1$, $x + y + kz = 1$ will have a unique solution?

(c) Does the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ depend on α and β? Justify.

(d) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ is a Vector space over $\mathbb{R}$. Prove that

$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ is a subspace of V.

Please Turn Over

6. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Reduce $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ to Echelon matrix equivalent form.

(b) Prove that a set of more than n vectors is linearly dependent in an n dimensional vector space.

(c) Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{bmatrix}$. Find k for which $AB = BA$.

(d) Determine the condition for which the system $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = b$, $5x + 7y + az = b^2$ has (i) unique solution, (ii) no solution, (iii) many solutions.

(e) Extend the set $\{(2, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ to a basis of $\mathbb{R}^3$.

(f) If $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, find the rank of the matrix $A + A^2 + A^3$.

(g) Find the independent vectors of the subset W of $\mathbb{R}^3$, where $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.