2025

MATHEMATICS — MDC

Paper : CC-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

$\mathbb{Z}$-পূর্ণ সংখ্যার সেট, $\mathbb{R}$-বাস্তব সংখ্যার সেট।

বিভাগ - ক

(মান ঃ ২৫)

১। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) i^i-এর মুখ্য মান নির্ণয় করো।

(খ) তিনটি ধনাত্মক সংখ্যা a, b, c-এর জন্য প্রমাণ করো $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$।

(গ) $x^3 + 3ax + b = 0$, এই সমীকরণের $(x - \alpha)^2$ আকারের একটি উৎপাদক থাকার শর্ত নির্ণয় করো।

(ঘ) দেখাও যে, $x^7 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ সমীকরণটির কমপক্ষে চারটি অবাস্তব বীজ আছে।

২। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α, β, γ হলে যে সমীকরণটির বীজগুলি $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, তা নির্ণয় করো।

(খ) যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ এই সমীকরণটির একটি বীজ অপর দুটি বীজের যোগফলের সমান হয়, প্রমাণ করো $p^3 + 8r = 4pq$।

(গ) দেখাও যে, $\cos\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$।

(ঘ) যদি $x + y + z = 1$ হয়, প্রমাণ করো যে $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$-এর সর্বনিম্ন মান হবে 9 এবং $(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 8xyz$।

(ঙ) যদি $u + iv = \cot(x + iy)$ হয়, তবে দেখাও যে $u^2 + v^2 - 2u \cot 2x = 1$।

(চ) k-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$ সমীকরণটির চারটি বীজ বাস্তব ও মানে অসমান।

(ছ) কার্ডনের পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^3 - 3x + 1 = 0$।

Please Turn Over

বিভাগ - খ

(মান ঃ ২৫)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) ধরো, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ দুটি চিত্রণ যারা $f(x) = x^3$ এবং $g(x) = 5x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞাত, সকল $x \in \mathbb{R}$-এর জন্য। তাহলে $f \circ g$ চিত্রণটি নির্ণয় করো।

(খ) 7^{20}-কে 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে, তা নির্ণয় করো।

(গ) $\mathbb{R} = \{(a, b) : ab \geq 0\}$, সম্পর্কটি পূর্ণসংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$-এর উপর প্রতিবর্তী (reflexive), প্রতিসম (symmetric) এবং অনুবর্তী (transitive) হবে কি?

(ঘ) যদি $a \equiv b \pmod{m}$ এবং $c \equiv d \pmod{m}$ হয়, তবে প্রমাণ করো $ac \equiv bd \pmod{m}$, যেখানে a, b, c, d পূর্ণসংখ্যা এবং m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) সকল পূর্ণসংখ্যা সেট $\mathbb{Z}$-এর উপর সংজ্ঞায়িত সম্পর্ক ρ–টি নিম্নরূপ ঃ

$$\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a - b| \leq 7\}।$$

ρ সম্পর্কটি প্রতিবর্তী (reflexive), প্রতিসম (symmetric) এবং অনুবর্তী (transitive) হবে কি? যুক্তিসহ উত্তর দাও। ৫

(খ) ধরো, $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দুটি চিত্রণ। যদি $g \circ f : A \to C$ একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, f একটি একৈক চিত্রণ এবং g একটি উপরিচিত্রণ। ৫

(গ) ধরো, একটি চিত্রণ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যা $f(x) = \frac{5x+3}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। প্রমাণ করো f একটি একৈক এবং উপরিচিত্রণ। f^{-1} চিত্রণটি নির্ণয় করো। ৫

(ঘ) Division algorithm-টি লেখো। প্রমাণ করো যে, কোনো বিজোড় পূর্ণসংখ্যার বর্গ সর্বদা $(8k + 1)$ ধরনের হয়। ৫

(ঙ) গাণিতিক আরোহণের সাহায্যে প্রমাণ করো $\left(10^{2n-1} + 1\right)$, সকল $n \in \mathbb{N}$-এর জন্য 11 দ্বারা বিভাজ্য। ৫

(চ) নিম্নলিখিত কনগ্রুয়েন্স (Congruence) সিস্টেমের সমাধান করো ঃ

$x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$ ৫

(ছ) (অ) ইউক্লিডিয়ান algorithm ব্যবহার করে $gcd(24, 36)$-কে $24u + 36v$ রূপে প্রকাশ করো, যেখানে u, v পূর্ণসংখ্যা।

(আ) প্রমাণ করো যে, যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা এবং p/ab হয়, তবে p/a অথবা p/b। ২+৩

বিভাগ - গ

(মান ঃ ২৫)

৫। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) 'k'-এর মান নির্ণয় করো যাতে (1, 3, 1), (2, k, 0) এবং (0, 4, 1) ভেক্টরত্রয় রৈখিকভাবে নির্ভরশীল হয় $\mathbb{R}^3$-এ।

(খ) ভেক্টর (4, 3, 5)-কে (0, 1, 3) এবং (2, 1, 1)-এর রৈখিক সমন্বয় (linear combination) হিসাবে প্রকাশ করো।

(গ) নিম্নলিখিত সিস্টেমটি সুসংহত (consistent) কি না নিরূপণ করো ঃ

$x + y + z = 9,\ 3x - 2y + 4z = 3.$

(ঘ) সংজ্ঞার সাহায্যে $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা (rank) নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স-টির Row-Echelon ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করো এবং তাহা হইতে মাত্রা নির্ণয় করো ঃ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(খ) 'a' এবং 'b'-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $x + y + z = 1,\ 2x + 3y + 5z = b,\ 4x + 5y + az = b^2$ সমীকরণগুলির

(অ) একটিমাত্র সমাধান থাকবে, (আ) একের অধিক সমাধান থাকবে এবং (ই) কোনো সমাধান থাকবে না।

(গ) ম্যাট্রিক্স $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 5 & 7 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$-এর মাত্রা (rank) 2 হলে, λ-এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে $AX = B$ আকারে লেখো এবং সমাধান করো ঃ

$x + y + z = 1$

$2x + y + 4z = 1$

$4x + y + 10z = 1$

(ঙ) দেখাও যে, ভেক্টর চতুষ্টয় $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$ এবং $\delta = (1, 1, 1)$ রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent) কিন্তু যে-কোনো তিনটি ভেক্টর সর্বদা রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent)।

(চ) যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে $A^2 - 4A - 5I = 0$

(ছ) (1, 2, 1) এবং (2, 1, 1) ভেক্টরগুলিকে ধারণ করে $\mathbb{R}^3$-এর একটি বিস্তার সেট (Spanning set) নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

$\mathbb{Z}$-set of integers, $\mathbb{R}$-set of real numbers.

Group – A

(Marks : 25)

1. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the principal value of i^i.

(b) For three positive numbers a, b, c prove that $(b + c)(c + a)(a + b) \geq 8abc$.

(c) Find the condition so that the equation $x^3 + 3ax + b = 0$ has a factor of the form $(x - \alpha)^2$.

(d) Show that the equation $x^7 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ has at least four imaginary roots.

2. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) If α, β, γ are the roots of the equation $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$.

(b) If sum of two roots of a cubic equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, is equal to the third one, prove that $p^3 + 8r = 4pq$.

(c) Show that $\cos\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

(d) If $x + y + z = 1$, prove that the least value of $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ is 9 and $(1 - x)(1 - y)(1 - z) > 8xyz$.

(e) If $u + iv = \cot(x + iy)$, then show that $u^2 + v^2 - 2u \cot 2x = 1$.

(f) Find the value of k for which the equation $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + k = 0$ has four real and unequal roots.

(g) Solve by Cardan's method : $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Group – B

(Marks : 25)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Two mappings $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are defined by $f(x) = x^3$ and $g(x) = 5x + 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. Find the mapping $f \circ g$.

(b) Find the remainder when 7^{20} is divided by 4.

(c) Find whether the relation $\mathbb{R} = \{(a, b) : ab \geq 0\}$ on the set of all integers $\mathbb{Z}$ is reflexive, symmetric and transitive.

(d) If $a \equiv b \pmod{m}$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then prove that $ac \equiv bd \pmod{m}$, where a, b, c, d are integers and m is positive integer.

4. Answer ***any four*** questions :

(a) A relation ρ on the set of integer $\mathbb{Z}$ is defined by $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a - b| \leq 7\}$. Is the relation reflexive , symmetric and transitive? Justify your answer. 5

(b) Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ be two mapping. If $g \circ f : A \to C$ is bijective, prove that f is injective and g is surjective. 5

(c) Prove that the mapping $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \frac{5x+3}{2}$ is a bijective mapping. Find f^{-1}. 5

(d) State Division algorithm. Prove that the square of an odd integer is of the form $(8k + 1)$. 5

(e) Using the principle of mathematical induction, prove that $\left(10^{2n-1} + 1\right)$ is divisible by 11, for all $n \in \mathbb{N}$. 5

(f) Find all solution of the system of the congruence :

$x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$. 5

(g) (i) Using Euclidean algorithm express $gcd(24, 36)$ as $24u + 36v$, where u, v are integers.

(ii) Prove that if p be a prime number and p/ab, then p/a or p/b. 2+3

Group – C

(Marks : 25)

5. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the value of k so that the vectors (1, 3, 1), (2, k, 0) and (0, 4, 1) are linearly dependent in $\mathbb{R}^3$.

(b) Express (4, 3, 5) as a linear combination of (0, 1, 3) and (2, 1, 1).

(c) Check whether the following system is consistent or not :

$x + y + z = 9$, $3x - 2y + 4z = 3$.

(d) Find the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$ using definition.

Please Turn Over

6. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Reduce the following matrix to Row-Echelon matrix and hence find its rank :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Find values of a and b for which the equations $x + y + z = 1$, $2x + 3y + 5z = b$, $4x + 5y + az = b^2$ have (i) unique solution, (ii) more than one solution, and (iii) no solution.

(c) Find all real values of λ for which the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 5 & 7 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ is 2.

(d) Transform the system of equation $x + y + z = 1$, $2x + y + 4z = 1$ and $4x + y + 10z = 1$ to a matrix equation $AX = B$. Hence, solve the system.

(e) Show that the four vectors $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$ and $\delta = (1, 1, 1)$ are linearly dependent but any three of them are linearly independent.

(f) If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, then show that $A^2 - 4A - 5I = 0$.

(g) Find a spanning set of $\mathbb{R}^3$ containing the vectors (1, 2, 1) and (2, 1, 1).