

2025

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

সমগ্র প্রশ্নপত্রে \mathbb{R} বাস্তব সংখ্যার সেট-কে নির্দেশ করে।

সমস্ত চিহ্নের স্বাভাবিক অর্থ ধরে নিতে হবে।

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$2\frac{1}{2} \times 2$

(ক) $\frac{i^5 + i^9 + i^{14}}{i^6 + i^{11} + i^{13}}$ -কে $a + ib$ আকারে প্রকাশ করো। ($i = \sqrt{-1}$)

(খ) যে-কোনো দুটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a এবং b -এর জন্য প্রমাণ করো যে, $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ ।

(গ) $x^3 + x + 1 = 0$ সমীকরণের তিনটি বীজ α , β এবং γ হলে, $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) $z = 1 + i \tan \frac{3\pi}{5}$ হলে, $\arg z$ -এর মুখ্য মান নির্ণয় করো।

২। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$ । ৫

(খ) i^i -এর মুখ্য মান নির্ণয় করো এবং দেখাও যে i^i -এর মানগুলি একটি গুণোত্তর প্রগতিতে আছে যার সাধারণ অনুপাত $e^{-2\pi}$ । ২+৩

(গ) $x^3 - 6x - 4 = 0$ সমীকরণটির তিনটি বীজ α , β এবং γ হলে, $\alpha + 2$, $\beta + 2$, $\gamma + 2$ বীজবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় করো। এর থেকে দেখাও যে, প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ -2 হবে। ৪+১

(ঘ) $4x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 25x + 6 = 0$ সমীকরণটির বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকলে, সমীকরণটি সমাধান করো। ৫

(ঙ) Cardan-এর পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করো। ৫

(চ) যদি a, b ধনাত্মক সংখ্যা এবং $a + b = 6$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{199}{9}$ । ৫

Please Turn Over

(3503)

(ছ) প্রমাণ করো যে, $(n!)^3 \geq n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ ।

৫

বিভাগ - খ

(মান : ২৫)

৩। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২^১/_২ × ২

(ক) $\rho = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : ab > 0\}$ হলে দেখাও যে, ρ সম্বন্ধটি symmetric এবং transitive কিন্তু reflexive নয়।

(খ) $f: A \rightarrow B$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \forall x \in A \text{ যেখানে } A = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ এবং } B = \mathbb{R} \setminus \{1\}, [\mathbb{R} \text{ বাস্তব সংখ্যার সেট}]$$

f^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে কি? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(গ) $n = 1225$ হলে $\sigma(n)$ -এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $\sigma(n)$, n -এর সমস্ত ধনাত্মক ভাজ্যের যোগফল বোঝাচ্ছে।

(ঘ) প্রমাণ করো যে, অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা বিদ্যমান।

৪। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) Chinese remainder theorem প্রয়োগ করে x -এর মান নির্ণয় করো :

৫

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

(খ) \mathbb{Z}^* যদি ঋণাত্মক নয় এরূপ পূর্ণসংখ্যার সেট হয় এবং $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$ অপেক্ষকটি $f(x) = \frac{1}{2}[x+|x|], \forall x \in \mathbb{Z}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তাহলে $f(x)$ bijective কি না যাচাই করো।

৫

(গ) (অ) 17^{17} -এর একক স্থানের সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

(আ) a এবং b দুটি পূর্ণসংখ্যা এবং $7a \equiv 7b \pmod{5}$ হলে দেখাও যে, $a \equiv b \pmod{5}$ ।

৩+২

(ঘ) আরোহ নীতির সাহায্যে প্রমাণ করো : $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}$ ।

৫

(ঙ) প্রমাণ করো যে, $\phi(2n) = \phi(n)$, যখন n অযুগ্ম সংখ্যা

$$= 2\phi(n), \text{ যখন } n \text{ যুগ্ম সংখ্যা।}$$

৫

(চ) উদাহরণ দাও :

(অ) একটি injective অপেক্ষক $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ।

(আ) একটি surjective অপেক্ষক $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ।

২+৩

(ছ) Euclidean Algorithm ব্যবহার করে, দুটি পূর্ণসংখ্যা u এবং v নির্ণয় করো যাতে $128u + 66v = 2$ হয়।

৫

(3)

D(2nd Sm.)-Mathematics-H/MN-2/CCF

বিভাগ - গ

(মান : ২৫)

৫। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২^১/_২ × ২(ক) সত্যতা যাচাই করো : $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ সেটের ভেক্টরগুলি \mathbb{R}^3 -তে linearly dependent।(খ) 'a'-এর মান নির্ণয় করো যেখানে $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank 1-এর বেশি হবে না।(গ) \mathbb{R}^3 -এর উপাদান $(1, 2, 3)$ ভেক্টরটিকে $(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ -এর রৈখিক সমন্বয় (linear combination) রূপে প্রকাশ করো।

(ঘ) নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলির consistency পরীক্ষা করো :

$$x + y + 2z = 1$$

$$2x + y + 2z = 3$$

$$3x + 2y + 3z = 7$$

৬। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) 'K'-এর সেই মানগুলি নির্ণয় করো যে যে ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির (i) কোনো সমাধান নেই (ii) একের অধিক সমাধান আছে (iii) একটি মাত্র সমাধান আছে :

$$x + y - z = 1$$

$$2x + 3y + Kz = 3$$

$$x + Ky + 3z = 2$$

(খ) (অ) যদি $AB = A$ এবং $BA = B$ হয়, তাহলে প্রমাণ করো, $A^2 = A$ এবং $B^2 = B$ যেখানে A এবং B দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।(আ) যদি $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে, যে-কোনো 2×2 ম্যাট্রিক্স B -এর জন্য $AB = BA$ হবে।

(গ) নীচের ম্যাট্রিক্সটির row-reduced Echelon form তৈরি করে ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় করো :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

(ঘ) দেখাও যে, $S = \{(1, 2, 0), (2, 1, 3), (1, 1, 1), (2, 3, 1)\}$ \mathbb{R}^3 -এর একটি রৈখিকভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent) সেট। তবে S -এর আবার একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) Subset S_1 বার করো যে $L(S_1) = L(S)$ হয়।

Please Turn Over

(3503)

(ঙ) $2x - y = 3$, $3y - 2z = 5$ এবং $2z - x = -4$ সমীকরণগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকার $AX = B$ -তে পরিণত করে সমাধান করো।

২+৩

(চ) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান সেটের parametric form নির্ণয় করো :

৫

$$x_1 - 8x_3 - 7x_4 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

(ছ) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ হলে, $P^3 + 2P$ -এর rank নির্ণয় করো।

৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Throughout the question paper \mathbb{R} denotes the set of real numbers.

Other symbols have their usual meaning.

Group - A

(Marks : 25)

1. Answer *any two* questions :

2½×2

(a) Express $\frac{i^5 + i^9 + i^{14}}{i^6 + i^{11} + i^{13}}$ in $a + ib$ form. ($i = \sqrt{-1}$)

(b) For any two positive real numbers a and b , prove that $a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$.

(c) If α , β and γ are the roots of the equation $x^3 + x + 1 = 0$, then find the value of $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1)$.

(d) Find the principal value of $\arg z$, where $z = 1 + i \tan \frac{3\pi}{5}$.

2. Answer *any four* questions :

(a) If n is a positive natural number, then prove that $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$.

5

(b) Find the principal value of i^i and also show that all the values of i^i form a G.P. with common ratio $e^{-2\pi}$.

2+3

(c) If α , β and γ are the roots of the equation $x^3 - 6x - 4 = 0$, find the equation whose roots are $\alpha + 2$, $\beta + 2$ and $\gamma + 2$. Hence, show that -2 is a root of the original equation.

4+1

(5)

D(2nd Sm.)-Mathematics-H/MN-2/CCF

- (d) Solve the equation $4x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 25x + 6 = 0$, given that the roots of the equation are in arithmetic progression. 5
- (e) Solve $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ by Cardan method. 5
- (f) If a, b are positive numbers and $a + b = 6$, then prove that $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{199}{9}$. 5
- (g) Prove that $(n!)^3 \geq n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 5

Group - B

(Marks : 25)

3. Answer **any two** questions :

2½×2

- (a) If $\rho = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : ab > 0\}$, then show that ρ is symmetric and transitive but not reflexive.
- (b) $f: A \rightarrow B$ function defined as follows :
- $$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \forall x \in A \text{ where } A = \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ and } B = \mathbb{R} \setminus \{1\}, [\mathbb{R} \text{ is the set of real numbers}]$$
- Check whether f^{-1} exists? Give proper reason.
- (c) Find $\sigma(n)$, where $n = 1225$ and $\sigma(n)$ denotes the sum of all positive divisors of n .
- (d) Prove that the number of primes is infinite.

4. Answer **any four** questions :

(a) Solve for x using Chinese remainder theorem :

5

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

(b) If \mathbb{Z}^* be the set of non-negative integers and $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^*$ be a mapping defined by

$$f(x) = \frac{1}{2}[x + |x|], \forall x \in \mathbb{Z}; \text{ then check whether } f(x) \text{ is bijective or not?} \quad 5$$

(c) (i) Find the digit in the unit place of 17^{17} .

(ii) For two integers a and b , if $7a \equiv 7b \pmod{5}$, then show that $a \equiv b \pmod{5}$. 3+2

(d) Prove by mathematical induction : $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \dots + n.2^n = (n-1)2^{n+1} + 2, \forall n \in \mathbb{N}$. 5

Please Turn Over

(3503)

- (e) Prove that $\phi(2n) = \phi(n)$, when n is odd
 $= 2\phi(n)$, when n is even. 5
- (f) Give examples of :
 (i) an injective mapping from \mathbf{N} to \mathbf{Z} .
 (ii) a surjective mapping from \mathbf{N} to \mathbf{Z} . 2+3
- (g) Using Euclidean Algorithm, find two integers u and v such that $128u + 66v = 2$. 5

Group - C**(Marks : 25)**

5. Answer *any two* questions : 2½×2

- (a) Prove or disprove : the set of vectors $\{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ in \mathbb{R}^3 linearly dependent.
- (b) Determine the values of 'a' so that the rank of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$ can't exceed 1.
- (c) $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Express $(1, 2, 3)$ as linear combination of the vectors $(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.
- (d) Examine the consistency of the following system of linear equations :

$$x + y + 2z = 1$$

$$2x + y + 2z = 3$$

$$3x + 2y + 3z = 7$$

6. Answer *any four* questions :

- (a) Find the value of K for which the following system of equations has (i) no solution (ii) more than one solution (iii) only one solution : 5

$$x + y - z = 1$$

$$2x + 3y + Kz = 3$$

$$x + Ky + 3z = 2$$

- (b) (i) If A and B are two square matrices such that $AB = A$ and $BA = B$, show that $A^2 = A$ and $B^2 = B$.

- (ii) If $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, then show that, for any 2×2 matrix B , $AB = BA$. 3+2

- (c) Find rank of the following matrix by reducing it to row-reduced Echelon form : 5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

(7)

D(2nd Sm.)-Mathematics-H/MN-2/CCF

- (d) Show that the vectors in $S = \{(1, 2, 0), (2, 1, 3), (1, 1, 1), (2, 3, 1)\}$ are linearly dependent set in \mathbb{R}^3 .
Find a subset S_1 of S s.t. $L(S_1) = L(S)$ and the vectors in S_1 are linearly independent. 5
- (e) Express the equations $2x - y = 3$, $3y - 2z = 5$ and $2z - x = -4$ in the $AX = B$ form and solve. 2+3
- (f) Find the parametric form of the solution set of : 5

$$x_1 - 8x_3 - 7x_4 = 0$$

$$x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0$$

- (g) If $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, find the rank of the matrix $P^3 + 2P$. 5
-