2025

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-4

(Mechanics)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

১। *যে-কোনো ছয়টি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৬

(ক) রৈখিক ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি লেখো।

(খ) একটি কণার গতিবেগের মান x-অক্ষের সমান্তরালে $(a + cy)$ এবং y-অক্ষের সমান্তরালে $(b + dx)$, a, b, c, d ধ্রুবক। কণাটির গতিপথ নির্ণয় করো।

(গ) কেন্দ্রীয় কক্ষপথে অ্যাপস ও অ্যাপসাইডাল দূরত্ব বলতে কী বোঝো?

(ঘ) কেপলারের গ্রহের গতির সূত্রগুলি লেখো।

(ঙ) $\sqrt{2}P, \sqrt{3}P$ এবং Q বল তিনটি একটি কণার উপর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে; $\sqrt{3}P$ এবং Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো যদি $\sqrt{2}P$ এবং Q বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 60° হয়।

(চ) $\frac{1}{2}$ kg ভরের একটি পাথর স্থির অবস্থা থেকে পড়ার সময় মাধ্যাকর্ষণ দ্বারা দশম সেকেন্ডে কৃতকার্য নির্ণয় করো।

(ছ) 20 নিউটন একটি বল একটি বস্তুর উপর 0.5 সেকেন্ড ধরে ক্রিয়া করে। বলের ঘাত নির্ণয় করো।

(জ) একটি কণা $r = ae^{\theta}$ রেখায় এরূপে গতিশীল যে এর ত্বরণের অরীয় উপাংশ শূন্য। দেখাও যে, এর কৌণিক গতিবেগ ধ্রুবক।

(ঝ) Varignon-এর উপপাদ্যটি বিবৃত করো।

(ঞ) যদি সময় (t) গতিবেগের (v) অপেক্ষক হলে প্রমাণ করো যে ত্বরণের (f) হ্রাসের হার হয় $f^3 \dfrac{d^2t}{dv^2}$ ।

বিভাগ - খ

২। *যে-কোনো সাতটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৭

(ক) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C তে যথাক্রমে তিনটি বল P, Q, R বিপরীত বাহুর সঙ্গে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল থেকে সাম্যাবস্থা তৈরি করে। দেখাও যে $P : Q : R = a : b : c$।

Please Turn Over

(খ) একটি কণা (μ ÷ দূরত্ব) ত্বরণ নিয়ে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু 'O'-এর দিকে চলমান। কণাটি যদি 'O' থেকে 'a' দূরত্বে স্থিরাবস্থায় যাত্রা শুরু করে, তবে দেখাও যে কণাটি $a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}$ সময় পর 'O' বিন্দুতে পৌঁছবে।

(গ) একটি বস্তুকণাকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে V গতিবেগে উপরের দিকে ছোড়া হল। পৃথিবীর আকর্ষণ বল ধ্রুবক ধরে নিলে বস্তুটি h উচ্চতা উঠতে পারে এবং আকর্ষণ বল পরিবর্তনশীল ধরে নিলে H উচ্চতা উঠতে পারে। যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ r হয় তবে দেখাও $\frac{1}{h}-\frac{1}{H}=\frac{1}{r}$।

(ঘ) একটি বস্তুকণা kv^3 মন্দন সৃষ্টিকারী একটি বাধার অধীনে সরলরেখায় গতিশীল। কণাটির গতিবেগ v এবং k একটি ধ্রুবক হলে দেখাও যে, $v=\frac{u}{1+ksu}$, যেখানে u হল কণাটির প্রাথমিক বেগ এবং s হল দূরত্ব।

(ঙ) একটি ইঞ্জিন দ্বারা প্রতি মিনিটে 80 ফুট/সেকেন্ড গতিবেগে 10000 পাউন্ড জল অভিক্ষিপ্ত হয়। ওই ইঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় করো।

(চ) একটি বস্তুকণা অভিকর্ষের অধীনে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে পতনশীল। প্রমাণ করো যে, গতিপথের যে-কোনো বিন্দুতে কণার গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তির যোগফল ধ্রুবক।

(ছ) v গতিবেগ নিয়ে চলমান একটি 'm' ভরবিশিষ্ট বুলেট একটি M ভরবিশিষ্ট ব্লককে আঘাত করে, ব্লকের ভিতরে ঢুকে যায়। বুলেট এবং ব্লকের গতির দিক একই। দেখাও গতিশক্তির $\frac{M}{M+m}$ অংশ নষ্ট হয়েছে।

(জ) W এবং W' দুটি ভার একটি হালকা দড়ি দ্বারা সংযুক্ত যা একটি মসৃণ চাকা (পুলি)-এর উপর দিয়ে যায়। যদি চাকাটি অভিকর্ষের ত্বরণের সমান ত্বরণে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে উঠে, তবে প্রমাণ করো যে দড়ির টান হবে $\frac{4WW'}{W+W'}$।

(ঝ) একটি কণা V বেগে অভিকর্ষের অধীনে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত হল। ধরে নেওয়া হল যে বায়ুর বাধা kv^2 প্রতি একক ভরের জন্য, যেখানে v হল কণাটির বেগ এবং k একটি ধ্রুবক। কণাটির গতির সমীকরণ নির্ণয় করো এবং কণাটি যে উচ্চতায় স্থির হবে সেই উচ্চতাটি নির্ণয় করো। যদি কণাটি উপরের দিকে প্রক্ষিপ্ত না হয়ে স্থির অবস্থা থেকে নীচের দিকে পড়ে, তবে t সময় পর কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করো।

(ঞ) একটি ত্রিভুজ ABC-এর তিনটি বাহু BC, CA এবং AB বরাবর যথাক্রমে তিনটি বল P, Q এবং R ক্রিয়াশীল। যদি লব্ধ বলটি অন্তঃকেন্দ্র দিয়ে যায়, তবে দেখাও যে, $P+Q+R=0$, যদি লব্ধ বলটি পরিধিকেন্দ্র দিয়ে যায় তবে দেখাও যে, $P\cos A+Q\cos B+R\cos C=0$।

(ট) একটি M ভরবিশিষ্ট কামান থেকে m ভরবিশিষ্ট গোলা নিক্ষেপের জন্য বিস্ফোরণে E পরিমাণ গতিশক্তি সৃষ্টি হয়, দেখাও যে কামানের গোলার প্রারম্ভিক গতিবেগ ছিল $\sqrt{\frac{2ME}{(M+m)m}}$।

বিভাগ - গ

৩। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৭×৩

(ক) দেখাও যে, একটি বস্তুকে পৃথিবীপৃষ্ঠ থেকে 7 মাইল প্রতি সেকেন্ড গতিবেগের থেকে বেশি বেগ নিয়ে ছোড়া হলে বস্তুটি কখনো পৃথিবীতে ফিরে আসবে না।

(খ) যদি একটি গ্রহ তার বৃত্তাকার কক্ষপথে হঠাৎ করে থেমে যায়, তবে দেখাও যে, গ্রহটি সূর্যের উপরে পড়তে যে সময় লাগবে তা নিজ কক্ষপথে একবার ঘোরার সময়ের $\frac{\sqrt{2}}{8}$ গুণ।

(গ) একটি কণা একটি বলের প্রভাবে পরাবৃত্ত আঁকে এবং বলটি সর্বদা তার অক্ষের দিকে লম্বভাবে পরিচালিত হয়। প্রমাণ করো যে, বলটি কোটি (অর্ডিনেট)-এর ঘনের সঙ্গে ব্যস্তানুপাতিক হবে।

(ঘ) একটি কণা সমতলে বক্ররেখায় চলমান। কণাটির স্পর্শ বেগ, স্পর্শ ত্বরণ এবং অভিলম্ব বেগ, অভিলম্ব ত্বরণ নির্ণয় করো।

(ঙ) একটি কণা $x^2 = 8y$ প্যারাবোলা বর্ণনা করে, যেখানে বল সর্বদা y-অক্ষের লম্ব। বলের সূত্র ও যে-কোনো বিন্দুতে বেগ নির্ণয় করো।

(চ) যদি v_1 এবং v_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করো যে, $(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

1. Answer ***any six*** questions : 2×6

(a) State the principle of conservation of linear momentum.

(b) The velocity of a particle parallel to x-axis and y-axis are $(a + cy)$ and $(b + dx)$ respectively, where a, b, c, d are constants. Find the path of the particle.

(c) What do you mean by apse and apsidal distance in a central orbit?

(d) State the Kepler's Laws of planetary motion.

(e) Forces equal to $\sqrt{2}P, \sqrt{3}P$ and Q acting on a particle are in equilibrium; find the angle between the forces $\sqrt{3}P$ and Q if the angle between $\sqrt{2}P$ and Q is 60°.

(f) Find the work done by gravity on a stone having a mass of ½ kg during the tenth second of its fall from rest.

(g) A force of 20N acts on a body for 0.5 sec. Find the impulse of the force.

(h) A particle describes the curve $r = ae^{\theta}$ in such a manner that its acceleration has no radial component. Prove that its angular velocity is constant.

(i) State the Varignon's theorem.

(j) If time t be regarded as a function of velocity v prove that the rate of decrease of acceleration f is $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$.

Group - B

2. Answer ***any seven*** questions : 6×7

(a) Three forces P, Q, R acting at the vertices A, B, C respectively of a triangle, each perpendicular to opposite side, keep it in equilibrium. Prove that $P : Q : R = a : b : c$.

(b) A particle moves with an acceleration ($\mu \div$ distance) towards a fixed point O. If it starts from rest at a distance 'a' from O, show that it will arrive at O in time $a\sqrt{\frac{\pi}{2\mu}}$.

(c) If h be the height attained by a particle when projected with a velocity V from the Earth's surface supposing its attraction constant and H be the corresponding height when the variation of gravity is taken into account, prove that $\frac{1}{h} - \frac{1}{H} = \frac{1}{r}$, where r is the radius of the Earth.

(d) A particle moving in a straight line subject to a resistance which produces the retardation kv^3, where v is the velocity and k is constant. If u is the initial velocity, then show that $v = \frac{u}{1+ksu}$, where s is the distance.

(e) Find the horse power of an engine which can project 10000 lbs of water per minute with a velocity of 80 ft/sec.

(f) A particle falls under gravity from a given height. Prove that at any moment of its motion the sum of kinetic energy and potential energy is constant.

(g) A bullet of mass 'm' moving with velocity v strikes a block of mass M which is free to move in the direction of motion of the bullet and is embedded in it. Show that a portion $\frac{M}{M+m}$ of the K.E. is lost.

(h) Two weights W and W' are connected by a light string passing over a smooth pulley. If the pulley moves vertically upwards with an acceleration equal to that of gravity, show that the tension of the string is $\frac{4WW'}{W+W'}$.

(i) A particle is projected vertically upwards under gravity with a velocity V. Assuming that the resistance of air is kv^2 per unit mass, where v is the velocity of the particle and k a constant, obtain the equation of motion of the particle and find the height of the particle where it will be at rest. If instead of being projected upwards, the particle falls downwards from rest, find the distance traversed by the particle in time t.

(j) Three forces P, Q, R act along the sides of BC, CA, AB of a triangle ABC taken in order. Show that if the resultant passes through the incentre, then $P + Q + R = 0$ and the circumcentre, then $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$.

(k) A shell of mass m is ejected from a gun of mass M by an explosion which generated kinetic energy E. Prove that the initial velocity of the shell is $\sqrt{\dfrac{2ME}{(M+m)m}}$.

Group - C

3. Answer ***any three*** questions : 7×3

(a) Prove that a body projected from the Earth's surface with speed exceeding 7 miles per second will not return to the Earth.

(b) If a planet is suddenly stopped in its orbit, supposed circular, show that it would fall into the Sun in a time which is $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ times the period of the planet's revolution.

(c) A particle describes a parabola under a force which is always directed perpendicularly towards its axis. Prove that the force must be inversely proportional to the cube of the ordinate.

(d) Find the tangential and normal components of velocity and acceleration of a particle which describes a plane curve.

(e) If a particle describes a parabola $x^2 = 8y$ under a force always perpendicular to the y axis. Find the law of force and the velocity at any point of its orbit.

(f) If v_1 and v_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively at nearest and farthest from the Sun, then prove that $(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$, where e is the eccentricity of the elliptic orbit of the planet.

———————