

2025

MATHEMATICS — MDC

Paper : CC-3

(Ordinary Differential Equations and Group Theory)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.

প্রাপ্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[সাধারণ অবকলন সমীকরণ]

পূর্ণমান : ৪৫

যে-কোনো নয়টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) নিম্নলিখিত অবকলন সমীকরণটির মাত্রা এবং ঘাত নির্ণয় করো :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = y$$

(খ) কেন্দ্রবিন্দু দিয়ে যাচ্ছে এমন সকল সরলরেখাসমূহের অবকলন সমীকরণটি নির্ণয় করো।

২+৩

২। সমাধান করো : $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$

৫

৩। প্রদত্ত সমীকরণটিতে $x^2 - 2yp + x + 2y = 0$, $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$

$x^2 = u$, $y - x = v$ প্রতিস্থাপন করে Clairaut's Form-এ নাও এবং এতদ্বারা এটির সমাধান নির্ণয় করো।

উপরন্তু এটির singular solution নির্ণয় করো (যদি এটির অস্তিত্ব থাকে)।

৪+১

৪। সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{(1+x)} = (1+x)e^x \sec y$

৫

৫। $y = px + \frac{a}{p}$, যেখানে $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$, সমীকরণটির সাধারণ (general) এবং singular সমাধান নির্ণয় করো।

৩+২

৬। সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x+y}$

৫

Please Turn Over

(4829)

৭। নিম্নলিখিত অবকলন সমীকরণটির লোকাসসমূহ (Loci) আলোচনা করো :

$$xp^2 = (x - a)^2 \quad | \quad \text{৫}$$

৮। Undetermined coefficients-এর পদ্ধতি অনুসরণ করে সমাধান করো : $(D^2 + 1)y = 2 \cos x$, $D \equiv \left(\frac{d}{dx}\right) \quad | \quad \text{৫}$

৯। ভ্যারিয়েশন অফ প্যারামিটারস (Variation of Parameters)-এর পদ্ধতি অনুসরণ করে সমাধান করো : $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \tan x \quad | \quad \text{৫}$

১০। সমাধান করো : $\frac{d^2 y}{dx^2} + a^2 y = \sec(ax)$, $(a \neq 0) \quad | \quad \text{৫}$

১১। সমাধান করো : $(D^2 - 9)y = e^{3x} \cos x$, যেখানে $D \equiv \frac{d}{dx} \quad | \quad \text{৫}$

১২। সহসমীকরণগুলির (simultaneous system) সমাধান করো : $\frac{dx}{dt} = x - y$, $\frac{dy}{dt} = x + y \quad | \quad \text{৫}$

১৩। সমাধান করো : $(x^2 D^2 + xD)y = x^2 \quad | \quad \text{৫}$

১৪। দেখাও যে, $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{(1-x)^2}$, $(0 < x < 1)$, একটি যথার্থ সমীকরণ এবং এতদ্বারা সমীকরণটির সমাধান করো। ৫

১৫। সমাধান করো : $\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2 \sin x \quad | \quad \text{৫}$

১৬। সমাধান করো : $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(xyz - 2x^2)} \quad | \quad \text{৫}$

বিভাগ - খ

[Group Theory]

(পূর্ণমান : ৩০)

যে-কোনো ছয়টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১৭। মনে করো (G, o) একটি group। তবে দেখাও যে,

(ক) $(a^{-1})^{-1} = a$, $\forall a \in G$

(খ) $(aob)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}$, $\forall a, b \in G$

২+৩

- ১৮। ধরে নাও (G, o) একটি গ্রুপ এবং H হল G -এর একটি অশূন্য সাবসেট। তবে প্রমাণ করো যে $(H, o), (G, o)$ -এর একটি সাবগ্রুপ হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হলো $a \in H, b \in H \Rightarrow aob \in H$ । ৫
- ১৯। প্রমাণ করো যে-কোনো গ্রুপ G -এর কেন্দ্র $Z(G)$ সর্বদা একটি নর্মাল সাবগ্রুপ। ৫
- ২০। যদি $\alpha = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ এবং $\beta = (1\ 4)(2\ 5)$ হয়, তবে $\beta^{-1}\alpha\beta$ -এর মান নির্ণয় করো। ৫
- ২১। প্রমাণ করো যে সাইক্লিক গ্রুপ-এর যে-কোনো সাবগ্রুপ সর্বদা সাইক্লিক। ৫
- ২২। ধরে নাও G একটি এবেলিয়ান গ্রুপ যদি H, G -এর একটি সাবসেট হয়, যেখানে $H = \{g \in G : g^2 = e\}$ তবে প্রমাণ করো যে H, G -এর একটি সাবগ্রুপ। ৫
- ২৩। ল্যাগরঞ্জের উপপাদ্যটি (Lagrange Theorem) বিবৃত করো ও প্রমাণ করো। ৫
- ২৪। মনে করো G পূর্ণসংখ্যা 1 ব্যতীত একটি বাস্তব সংখ্যার সেট। যদি $a * b = a + b - ab$ হয় $\forall a, b \in G$, তবে $(G, *)$ একটি এবেলিয়ান গ্রুপ হবে কিনা যাচাই করো। ৫
- ২৫। মনে করো (G, o) একটি গ্রুপ এবং $a, b \in G$ । যদি $o(a) = 3$ এবং $aoba^{-1} = b^2$ হয়, তবে $o(b)$ নির্ণয় করো যদি $b \neq e$ হয়। ৫
- ২৬। যদি $\{1, 2, 3\}$ সেট-এর একটি যুগ্ম বিন্যাস (even permutation) হয় A_3 তবে দেখাও যে A_3 একটি সাইক্লিক গ্রুপ হয় বিন্যাস গুণনের (product of permutation) মাধ্যমে। A_3 সাইক্লিক গ্রুপ-টির একটি generator নির্ণয় করো। ৩+২

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Ordinary Differential Equations]

(Marks : 45)

Answer any nine questions.

1. (a) Find the order and degree of the differential equation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = y.$$

- (b) Obtain the differential equation of all straight lines passing through the origin. 2+3

2. Solve : $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy = 0$. 5

Please Turn Over

(4829)

3. Reduce the equation :

$$xp^2 - 2yp + x + 2y = 0, \left(p = \frac{dy}{dx} \right)$$

to Clairaut's form by the substitution

$$x^2 = u, \quad y - x = v$$

and hence solve it. Also find the singular solution (if it exists).

4+1

4. Solve : $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{(1+x)} = (1+x)e^x \sec y$.

5

5. Find the general and singular solution of $y = px + \frac{a}{p}$, where $\left(p = \frac{dy}{dx} \right)$.

3+2

6. Solve : $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{2x+y}$.

5

7. Discuss the loci of the differential equation : $xp^2 = (x-a)^2$.

5

8. Solve by the method of undetermined coefficients : $(D^2 + 1)y = 2\cos x$, $D \equiv \left(\frac{d}{dx} \right)$.

5

9. Solve by the method of variation of parameters : $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x$.

5

10. Solve : $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec(ax)$, $(a \neq 0)$.

5

11. Solve : $(D^2 - 9)y = e^{3x}\cos x$, where $D \equiv \frac{d}{dx}$.

5

12. Solve the simultaneous system : $\frac{dx}{dt} = x - y$, $\frac{dy}{dt} = x + y$.

5

13. Solve : $(x^2D^2 + xD)y = x^2$.

5

14. Show that, the equation $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{(1-x)^2}$, $(0 < x < 1)$, is exact and hence solve it.

5

(5)

D(3rd Sm.)-Mathematics-MDC/CC-3/CCF

15. Solve : $\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2 \sin x$. 5

16. Solve : $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{(xyz - 2x^2)}$. 5

Group - B

[Group Theory]

(Marks : 30)

Answer *any six* questions.

17. Let (G, o) be a group. Then show that,

(a) $(a^{-1})^{-1} = a, \forall a \in G$

(b) $(aob)^{-1} = b^{-1} o a^{-1}, \forall a, b \in G$. 2+3

18. Let (G, o) be a group and H be a non-empty finite subset of G . Then prove that the necessary and sufficient condition that (H, o) is subgroup of (G, o) is $a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$. 5

19. Prove that, the centre $Z(G)$ of a group G is a normal subgroup of G . 5

20. If $\alpha = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ and $\beta = (1\ 4)(2\ 5)$, then find $\beta^{-1}\alpha\beta$. 5

21. Prove that, any subgroup of a cyclic group is cyclic. 5

22. Let G be an abelian group. Prove that, the subset $H = \{g \in G : g^2 = e\}$ forms a subgroup of G . 5

23. State and prove the Lagrange's theorem. 5

24. Let G be the set of real numbers except the integer 1. Let the operation $*$ in G be defined by $a*b = a + b - ab$ for $\forall a, b \in G$. Verify : $(G, *)$ is an Abelian group. 5

25. Let (G, o) be a group and $a, b \in G$. If $o(a) = 3$ and $aoboa^{-1} = b^2$, find $o(b)$ if $b \neq e$. 5

26. Show that A_3 , the set of even permutations of $\{1, 2, 3\}$ is a cyclic group with respect to product of permutations. Find a generator of the cyclic group A_3 . 3+2