2025

MATHEMATICS — MDC

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) যদি $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ সসীম হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করো।

(খ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx$ ।

(গ) $y=(x^2-1)^n$ হলে, দেখাও যে, $(x^2-1)y_2-2(n-1)xy_1-2ny=0$।

(ঘ) $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো, যখন $x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1+\cos\theta)$ ।

(ঙ) $f(x)=\sin x-Kx$ ক্ষয়িষ্ণু হলে, K-এর মান নির্ণয় করো।

(চ) $y^2=4x$ অধিবৃত্তের যে বিন্দুগুলিতে $x=1$, তাদের মধ্যবর্তী চাপের দৈর্ঘ্য (length of the arc) নির্ণয় করো।

(ছ) $x=\pm 1$, $y=0$ এবং $y=x^2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো, যখন $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^x+be^{-x}+2\sin x}{\sin x + x\cos x}=2$ ।

(খ) যদি $x^y=y^x$ হয়, দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x\log_e y-y)}{x(y\log_e x-x)}$ ।

(গ) যদি $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$। এখান থেকে আরও প্রমাণ করো যে, $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$।

(ঘ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ -এর Reduction Formula নির্ণয় করো, তারপর $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) দেখাও যে, (0, 0) থেকে (4, 8) বিন্দু পর্যন্ত $y = x^{3/2}$ বক্ররেখাটির চাপের দৈর্ঘ্য হয় $\frac{8}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$ একক।

(চ) প্রমাণ করো যে, $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত এবং তার নাভিলম্ব (latus rectum) দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $\frac{8}{3}$ বর্গ একক।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ $2\frac{1}{2}\times 2$

(ক) মূলবিন্দুকে (–2, 2) বিন্দুতে পরিবর্তন করলে $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 21 = 0$ সমীকরণটির পরিবর্তিত সমীকরণটি লেখো।

(খ) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 2z - 1 = 0$ গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(গ) $\frac{16}{r} = 4 - 5\cos\theta$ শঙ্কুটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ঘ) দেখাও যে, $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$ সমীকরণটি একটি উপবৃত্ত (Ellipse) প্রকাশ করো।

৪। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৫

(ক) $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 6y + 8 = 0$ সমীকরণটিকে তার ক্যানোনিকাল আকারে (canonical form) রূপান্তর করো এবং কনিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ কনিকটিকে স্পর্শ করবে যদি $(A-e)^2 + B^2 = 1$ হয়।

(গ) একটি সমতলে একটি স্থির বিন্দু (α, β, γ) দিয়ে যায় এবং স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয়কে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, OABC গোলকটির কেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ হলো $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} = 2$।

(ঘ) একটি চোঙের সমীকরণ নির্ণয় করো যার জনক রেখাগুলি $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ সরলরেখাটির সমান্তরাল এবং যার নির্দেশক বক্ররেখা হল $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = 3$ উপবৃত্তটি।

(ঙ) $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 4 = 0$ বৃত্তের সেই সমস্ত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো যারা $x + 2y + 3 = 0$ সরলরেখাটির সমান্তরাল।

(চ) দেখাও যে, কোনো উপবৃত্তের একজোড়া পরস্পর লম্ব স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ হল একটি বৃত্ত।

(ছ) যে গোলকটির কেন্দ্র $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5}$ রেখাটির ওপর অবস্থিত এবং যা (3, 4, 5) ও (–3, 0, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(জ) (1, 0, 4) বিন্দুগামী $16x^2 - 9y^2 = 4z$ পরাবৃত্তীয় পরাবলয়টির (hyperbolic paraboloid) জনক রেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঝ) দেখাও যে, $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$ সমীকরণটি একটি Central Conicoid, এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) দেখাও যে, $4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $8\hat{i} + 7\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় (coplanar)।

(খ) প্রমাণ করো যে, $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ ।

(গ) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ বিন্দুগামী সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঘ) একটি বল $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}, (1, -1, 2)$ বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়, (1, –2, 3) বিন্দুর সাপেক্ষে $\vec{F}$ বলের ভ্রামক নির্ণয় করো।

(ঙ) দেখাও যে, $[\hat{i} + \hat{j}\ \hat{j} + \hat{k}\ \hat{k} + \hat{i}] = 2$ ।

(চ) যদি $\vec{a} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 2t\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$ হয়, তবে $t = 0$ বিন্দুতে $\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

(ছ) প্রয়োগকৃত বল $\vec{F} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ দ্বারা $\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ বরাবর একটি বস্তুকে সরাতে কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ এবং $\vec{\gamma}$ তিনটি অসমতলীয় ভেক্টর হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right) \times \left(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right) = 0$ ।

(খ) (–2, 6, –6); (–3, 10, –9) এবং (–5, 0, –6) বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ তৈরি করো।

(গ) যদি $t = 2$ হলে $\vec{r}(t) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হয় এবং $t = 3$ হলে $\vec{r}(t) = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\int_2^3 \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt = 10 \text{ ।}$$

Please Turn Over

(ঘ) একটি স্থান বক্ররেখার (space curve) ওপর একটি গতিশীল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i} - 4t^2\hat{j} + 3t^2\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হলে, যে-কোনো সময় t-তে তার বেগ ও ত্বরণের মান এবং অভিমুখ নির্ণয় করো।

(ঙ) যদি একটি ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{a}(t)$-এর অভিমুখ স্থির (constant) থাকে, তবে দেখাও যে $\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ ।

(চ) $\vec{\gamma} = \left(2a\cos t, 2a\sin t, bt^2\right)$ হলে দেখাও যে, $\left[\dot{\vec{\gamma}}, \ddot{\vec{\gamma}}, \dddot{\vec{\gamma}}\right] = 8a^2bt$ ।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) If $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x + a\sin x}{x^3}$ be finite, find the value of a.

(b) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x dx$.

(c) If $y = (x^2 - 1)^n$ then show that, $(x^2-1)y_2 - 2(n-1)xy_1 - 2ny = 0$.

(d) Find $\frac{dy}{dx}$, when $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta)$.

(e) Find the value of K in order that $f(x) = \sin x - Kx$ is a decreasing function.

(f) Find the length of the arc of the parabola $y^2 = 4x$ between the points where $x = 1$.

(g) Find the area of the region bounded by $x = \pm 1$, $y = 0$ and $y = x^2$.

2. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Find the value of a and b in order that $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ae^x + be^{-x} + 2\sin x}{\sin x + x\cos x} = 2$.

(b) If $x^y = y^x$, then show that $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x\log_e y - y)}{x(y\log_e x - x)}$.

(c) If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, prove that $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$. Hence prove that

$$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0.$$

(d) Find the Reduction Formula for $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, then find the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx$.

(e) Show that the arc length of the curve $y = x^{3/2}$ from (0, 0) to (4, 8) is $\frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$ unit.

(f) Prove that the area bounded by $y^2 = 4x$ and its latus rectum is $\frac{8}{3}$ sq. unit.

Group - B

[Geometry]

(Marks : 35)

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Transform the equation $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ on transforming the origin to (–2, 2).

(b) Find the radius of the sphere : $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 2z - 1 = 0$.

(c) Find the length of latus rectum of the conic $\frac{16}{r} = 4 - 5\cos\theta$.

(d) Show that the equation $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$ represents an ellipse.

4. Answer ***any five*** questions : 6×5

(a) Reduce the equation $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 10x - 6y + 8 = 0$ to its canonical form and determine the nature of the conic.

(b) Show that the straight line

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$$

touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, if $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

(c) A plane passes through a fixed point (α, β, γ) and cuts the coordinates axes in A, B, C. Prove that the locus of the centre of the sphere OABC is given by $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=2$.

(d) Find the equation of cylinder whose generators are parallel to the line

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$$

and whose guiding curve is the ellipse

$$x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 3.$$

(e) Find the equation of the tangents to the circle $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 4 = 0$ which are parallel to the straight line $x + 2y + 3 = 0$.

(f) Show that the locus of the point of intersection of a pair of perpendicular tangents to an ellipse is a circle.

(g) Find the equation of the sphere whose center lies on the line

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{5}$$

and which passes through the point (3, 4, 5) and (–3, 0, 1).

(h) Find the equation of the generators of the hyperbolic paraboloid

$$16x^2 - 9y^2 = 4z$$

passing through the point (1, 0, 4).

(i) Show that $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2yz + 2zx + 2xy - 4x - 8z + 5 = 0$ represents a Central Conicoid. Find its centre.

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

5. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Show that the three vectors $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ and $8\hat{i}+7\hat{k}$ are coplanar.

(b) Prove that $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right]=2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

(c) Find the vector equation of the straight line passing through the point $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$.

(d) A force $\vec{F}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ is applied at the point (1, –1, 2). Find the moment of force $\vec{F}$ about the point (1, –2, 3).

(e) Show that $[\hat{i}+\hat{j}\ \hat{j}+\hat{k}\ \hat{k}+\hat{i}]=2$.

(f) If $\vec{a}=t^2\hat{i}-t\hat{j}+(2t+1)\hat{k}$ and $\vec{b}=2t\hat{i}+\hat{j}-t\hat{k}$, then find the value of $\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ at $t=0$.

(g) Find the work done in moving an object along a vector $\vec{r}=3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$. If the applied force is $\vec{F}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$.

6. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) If $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ and $\vec{\gamma}$ are three non-coplanar vectors, then prove that

$$\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)\times\left(\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)=0.$$

(b) Find the vector equation of a plane passing through the points (–2, 6, –6), (–3, 10, –9) and (–5, 0, –6).

(c) If $\vec{r}(t)=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ when $t=2$ and $\vec{r}(t)=4\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, when $t=3$, then show that $\int_2^3\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt=10$.

(d) The position vector of a moving point of a space curve is given by $\vec{r}=\hat{i}-4t^2\hat{j}+3t^2\hat{k}$. Find the magnitude and direction of the velocity and acceleration at any time t.

(e) If a vector function $\vec{a}(t)$ possesses constant direction then show that $\vec{a}\times\frac{d\vec{a}}{dt}=\vec{0}$.

(f) If $\vec{\gamma}=\left(2a\cos t, 2a\sin t, bt^2\right)$ then prove that $\left[\dot{\vec{\gamma}},\ddot{\vec{\gamma}},\dddot{\vec{\gamma}}\right]=8a^2bt$.

———————