# 2025

## MATHEMATICS — MINOR

**Paper : MN-1**

**(Calculus, Geometry and Vector Analysis)**

**Full Marks : 75**

*Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.*

*প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।*

**বিভাগ - ক**

**[Calculus]**

**(Marks : 20)**

১। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ।

(খ) $y = x^{\sinh x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $f(x) = kx - \sin x$ একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক হলে $k$-এর মানগুলি নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ হয়, দেখাও যে, $y_2 + k^2 y = 0$, যেখানে $A$, $B$ এবং $k$ ধ্রুবক।

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1} I_{n-2}$-এই Reduction formula ব্যবহার করে $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x\,dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(চ) যুগ্ম সমাকলন-এর সাহায্যে $r$-ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ছ) দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তটির পরিধির দৈর্ঘ্য $6\pi$ (কলনবিদ্যার সাহায্যে)।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) '$a$' এবং '$b$'-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3} = 1$ হয়।

(খ) যদি $y = \tan^{-1} x$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_{n-1} = 0$।

(গ) $\int \sin^n x\,dx$-এর Reduction formula কী লেখো ও তার সাহায্যে $\int \sin^4 x\,dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$ -এই বক্রটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ঙ) $y^2=4x$ অধিবৃত্ত এবং এর নাভিলম্বের দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(চ) $X$-অক্ষকে অক্ষ করে $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখার ঘূর্ণন সৃষ্ট ঘন (solid)-এর আয়তন নির্ণয় করো।

## বিভাগ - খ

## [Geometry]

**(Marks : 35)**

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২১/২×২

(ক) (–1, 2) বিন্দুতে স্থানান্তরিত সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $9x^2+4y^2+18x-16y=11$ বক্রটির পরিবর্তিত সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{5}{r}=3+6\cos\theta$ শঙ্কুটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z-2=0$ গোলকটির কেন্দ্রবিন্দু ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(ঘ) যে বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$, তার কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

৪। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৫

(ক) $4x^2+4xy+y^2-12x-6y+5=0$ সমীকরণটিকে তার cannonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে Conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $r\cos(\theta-\alpha)=p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r}=1+\cos\theta$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে $p=\frac{l\sec\alpha}{2}$।

(গ) $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তটির দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঘ) মূল বিন্দুগামী গোলকটি স্থানাঙ্ক-অক্ষগুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। OABC চতুস্তলক (Tetrahedron)-এর আয়তন K হলে গোলকের কেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঙ) একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ এবং যার অর্ধ-উল্লম্ব কোণ 30°।

(চ) যে Cylinder-এর generator গুলি $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখা $4x^2+y^2=1$, $z=0$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ছ) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ —এই hyperboloid-টির generating সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি (2, 3, –4) বিন্দু দিয়ে গমন করে।

(জ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় নলের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার ব্যাসার্ধ 10 একক এবং যার অক্ষ (1, 2, 3) বিন্দুগামী ও $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{2}$ সরলরেখার সমান্তরাল।

(ঝ) দেখাও যে $3x^2-y^2-z^2+6yz-6x+6y-2z-2=0$ সমীকরণটি একটি central conicoid হবে। এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

## বিভাগ - গ

## [Vector Analysis]

**(Marks : 20)**

৫। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) $x\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় হলে, $x$-ধ্রুবকটির মান নির্ণয় করো।

(খ) $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লেখো যা $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ বিন্দুগামী।

(গ) $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ এবং $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=2$ হলে $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ করো।

(ঙ) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর এবং $k$ যদি স্কেলার হয়, তবে সেই সমস্ত ভেক্টর $\vec{r}$ নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a}\times\vec{r}=\vec{b}$ এবং $\vec{a}\cdot\vec{r}=k$।

(চ) মান নির্ণয় করো, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, যেখানে, $\vec{r}=t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k}$।

(ছ) প্রমাণ করো যে, কোনো একটি ভেক্টর $\vec{\alpha}$-এর জন্য,

$$\hat{i}\times(\vec{\alpha}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{\alpha}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{\alpha}\times\hat{k})=2\vec{\alpha}\ .$$

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, যেখানে $\Delta ABC$ একটি ত্রিভুজ।

(খ) (2, –1, 1), (3, 2, –1) এবং (–1, 3, 2) বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।

(গ) একটি কণার উপর $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ধ্রুবক বলদুটি প্রযুক্ত হলে, কণাটি $A(1, 3, 2)$ বিন্দু থেকে $B(4, 5, -1)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। তাহলে কণাটির উপর বলের কার্য নির্ণয় করো।

(ঘ) প্রমাণ করো যে, $\left[\vec{\alpha}+\vec{\beta}\ \ \vec{\beta}+\vec{\gamma}\ \ \vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right]=2\left[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\right]$।

(ঙ) একটি কণা $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ বক্ররেখা বরাবর গতিশীল। তাহলে সময় যখন $t = 1$, কণার গতিবেগ ও ত্বরণের components গুলি $\left(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$ ভেক্টরের অভিমুখে নির্ণয় করো।

(চ) $\vec{A}=5t^2\hat{i}+t\hat{j}-t^3\hat{k}$ এবং $\vec{C}=(\sin t)\hat{i}-(\cos t)\hat{j}$ হলে $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$ নির্ণয় করো।

## [ English Version ]

*The figures in the margin indicate full marks.*

### Group - A

### [Calculus]

**(Marks : 20)**

**1.** Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Find the value of $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ when $y = x^{\sinh x}$.

(c) Find the values of $k$ for which the function $f(x) = kx - \sin x$ increases.

(d) If $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, then show that $y_2 + k^2y = 0$, where $A$, $B$ and $k$ are constants.

(e) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 x\,dx$, using the reduction formula : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\frac{1}{n-1}I_{n-2}$.

(f) Find by the method of double integral, the area of a circle of radius $r$.

(g) Show that the length of the circumference of the circle $x^2 + y^2 = 9$ is $6\pi$ (using calculus).

**2.** Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Find the values of $a$ and $b$ in order that $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$.

(b) If $y = \tan^{-1}x$, then show that $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_{n+1} + n(n - 1)y_{n-1} = 0$.

(c) Write down the Reduction formula for $\int\sin^n x\,dx$, hence evaluate $\int\sin^4 x\,dx$.

(d) Find the length of perimeter of the curve given by $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$.

(e) Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and its latus rectum.

(f) Find the volume of the solid generated by revolution of the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ about the $X$-axis.

## Group - B

## [Geometry]

## (Marks : 35)

**3.** Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the transformed equation of the curve $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$ referred to parallel axes through the point $(-1, 2)$.

(b) Determine the nature of the conic $\frac{5}{r} = 3 + 6\cos\theta$ and also find the length of its latus rectum.

(c) Find the centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

(d) Find the rectangular Cartesian coordinates of the point whose polar coordinate is $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$.

**4.** Answer ***any five*** questions : 6×5

(a) Reduce the equation $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$ to its cannonical form and hence determine the nature of the conic.

(b) If the straight line $r\cos(\theta - \alpha) = p$ touches the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$, show that $p = \frac{l\sec\alpha}{2}$.

(c) Find the equation of the locus of the points of intersection of mutually perpendicular tangents to the circle $x^2 + y^2 = r^2$.

(d) A sphere passes through the origin and meets the coordinate axes at A, B, C so that the volume of the tetrahedron OABC is K. Find the locus of the centre of the sphere.

(e) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin, whose axis is the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has semi-vertical angle of 30°.

(f) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is $4x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

(g) Find the equations of the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ passing through the point (2, 3, –4).

(h) Find the equation of the right circular cylinder whose radius is 10 units, axis passes through the point (1, 2, 3) and is parallel to the straight line $\frac{x-5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-7}{2}$.

(i) Show that the equation $3x^2-y^2-z^2+6yz-6x+6y-2z-2=0$ is a central conicoid. Find its centre.

## Group - C

## [Vector Analysis]

**(Marks : 20)**

**5.** Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Find the value of $x$ for which the vectors $x\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ and $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ are coplanar.

(b) Find the vector equation of the line passing through the point $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and parallel to the vector $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$.

(c) If $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ and $\vec{\alpha}.\vec{\beta}=2$, find $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$.

(d) Find the angle between two vectors $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ and $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$.

(e) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two vectors and let $k$ be a given scalar, find all vectors $\vec{r}$ such that $\vec{a}\times\vec{r}=\vec{b}$ and $\vec{a}\cdot\vec{r}=k$.

(f) If $\vec{r}=t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k}$, find $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$.

(g) Prove that for any proper vector $\vec{\alpha}$, $\hat{i}\times(\vec{\alpha}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{\alpha}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{\alpha}\times\hat{k})=2\vec{\alpha}$.

**6.** Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Prove by vector method, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ in a triangle ΔABC.

(b) Find the vector equation of a plane through the three points (2, –1, 1), (3, 2, –1) and (–1, 3, 2).

(c) A particle, acted on by constant forces $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ and $3\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ is displaced from the point $A(1, 3, 2)$ to the point $B(4, 5, -1)$. Find the work done by the force on the particle.

(d) Prove that $\left[\vec{\alpha}+\vec{\beta}\ \ \vec{\beta}+\vec{\gamma}\ \ \vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right]=2\left[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\right]$.

(e) A particle move along the curve $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$. Find the components of velocity and acceleration at time $t = 1$, in the direction $\left(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$.

(f) If $\vec{A}=5t^2\hat{i}+t\hat{j}-t^3\hat{k}$ and $\vec{C}=(\sin t)\hat{i}-(\cos t)\hat{j}$, then find $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$.

---