2025

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

(Calculus)

[মান ঃ ২০]

১। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) L'Hôpital-এর নিয়ম ব্যবহার করে, মূল্যায়ন করো $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ ।

(খ) $x=y^2$ বক্ররেখা এবং $x=0$ এবং $x=2$ সরলরেখাগুলি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(গ) x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রদত্ত বক্ররেখার ঘূর্ণনজনিত আয়তন নির্ণয় করো ঃ $y=\sin(2x), 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$ ।

(ঘ) যদি $x^y=y^x$ হয়, $\dfrac{dy}{dx}$-এর মান নির্ণয় করো।

(ঙ) যদি $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$ ।

(চ) যদি $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ হয়, তাহলে $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(ছ) $r=a\left(\cos\theta+\sin\theta\right), 0\le\theta\le\pi$-এই বক্ররেখাটির পরিধি নির্ণয় করো।

২। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য নয় প্রমাণ করো ঃ $f(x)=|x|$ ।

(খ) বক্ররেখার চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো ঃ $x=a\cos(t), y=a\sin(t); 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ ।

(গ) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো, যখন $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(1-a\cos x)+b\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$ ।

Please Turn Over

(ঘ) যদি $y = e^{m\sin^{-1}x}$ হয়, দেখাও যে, $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)x\,y_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0$।

(ঙ) যদি $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$ হয়, দেখাও যে, $I_{m,n} = \dfrac{n-1}{m+n} I_{m,\,n-2}$। অতঃপর $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^8 x\, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(চ) প্রথম চতুর্ভাগে (first quadrant) অবস্থিত astroid $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$-এর অংশটিকে y-অক্ষের চারিদিকে আবর্তিত করলে যে পৃষ্ঠতল উৎপন্ন হয়, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

বিভাগ - খ

(Geometry)

[মান ঃ ৩৫]

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) সমতল $x - 2y + 2z = 3$ ও $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z = 45$ গোলকের ছেদে প্রাপ্ত বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে, $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $2x - 2y + 3z = 9$ ও $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$ স্পর্শ করে।

(গ) $x^2 - y^2 + 3x + 2y = 1$ সমীকরণটি কীরূপে পরিবর্তিত হবে লেখো, যদি অক্ষদ্বয়কে $\dfrac{\pi}{2}$ কোণে আবর্তিত করা হয়।

(ঘ) $\dfrac{1}{r} = 1 + \cos\theta$ এবং $\dfrac{3}{r} = 1 - \cos\theta$ এই দুটি শঙ্কুর ছেদবিন্দু নির্ণয় করো।

৪। *যে-কোনো পাঁচটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৬×৫

(ক) যদি $r\cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি $\dfrac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহলে দেখাও যে, $p = \dfrac{l}{2}\sec\alpha$।

(খ) যদি P বিন্দুতে $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ পৃষ্ঠের ওপর অঙ্কিত যে-কোনো লম্ব যথাক্রমে G_1, G_2, G_3 বিন্দুতে $x = 0, y = 0, z = 0$ সমতলগুলির সাথে মিলিত হয়, দেখাও যে, $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$।

(গ) যে সিলিন্ডারের উৎপাদক রেখাগুলি $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$ রেখার সমান্তরাল এবং যার নির্দেশক বক্ররেখা উপবৃত্তাকার $x^2 + 2y^2 = 1,\ z = 3$, তার সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(ঘ) দেখাও যে দুটি বৃত্ত

$$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z = 0,\ x - y + z - 2 = 0;$$

এবং

$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + z - 5 = 0,\ 2x - y + 4z - 1 = 0;$$

একই গোলকের উপর অবস্থিত এবং গোলকের সমীকরণটি বের করো।

(ঙ) দেখাও যে সমীকরণ $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 22x - 10y + 7 = 0$ একটি উপবৃত্ত (Ellipse) নির্দেশ করে। উপবৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

(চ) দেখাও যে, যে শঙ্কু (cone) অক্ষসমূহ এবং $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ এই দুটি সরলরেখাদ্বয় দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণটি হল $3yz + 10zx + 6xy = 0$।

(ছ) $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$-এর স্পর্শক তলের সমীকরণ নির্ণয় করো, যা সরলরেখা $x + 9y - 3z = 0$ এবং $3x - 3y + 6z - 5 = 0$ দিয়ে গেছে।

(জ) $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 4x + 20y - 6z = 5$ এই দ্বিঘাত পৃষ্ঠটির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(ঝ) যদি উপবৃত্ত (ellipse) $r^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$ -এর পরস্পর লম্ব দুটি radius vectors r_1 ও r_2 হয়, তাহলে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$।

বিভাগ - গ

(Vector Analysis)

[মান ঃ ২০]

৫। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২×৪

(ক) যদি $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$, তাহলে দেখাও যে, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমতলীয়।

(খ) যদি $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ তিনটি ভেক্টরের জন্য $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ এবং $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 5, |\vec{\gamma}| = 7$, তাহলে $\vec{\alpha}$ এবং $\vec{\beta}$-র মধ্যে কোণটি নির্ণয় করো।

(গ) 6, 7, 2 পাউন্ড ওজনের বল যথাক্রমে (6, 2, 3), (3, –2, 6) এবং (2, –3, –6) বরাবর স্থানাঙ্কসহ একটি কণার উপর কাজ করে। যদি কণাটিকে (2, –1, –3) বিন্দু থেকে (5, –1, 1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত করা হয়, তাহলে দেখাও যে, সম্পন্ন কাজটি $53\frac{4}{7}$ ফুট পাউন্ড ওজন, দৈর্ঘ্যের একক এক ফুট।

(ঘ) যদি $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + \frac{2}{3}t^3\hat{k}$, তাহলে $k = \dfrac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$ -এর মান বের করো।

(ঙ) λ-এর সমস্ত সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো, যার জন্য ভেক্টর $\vec{\alpha} = \lambda(2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ একটি একক ভেক্টর হবে।

(চ) প্রমাণ করো $\left(\vec{\beta} - \dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}\right)$ ভেক্টরটি $\vec{\alpha}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব হবে।

(ছ) বিন্দু (4, 3, –1) দিয়ে অতিক্রমকারী এবং $\left(3\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}\right)$-এর সাথে লম্ব তলটির ভেক্টর নির্ণয় করো।

৬। *যে-কোনো তিনটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৪×৩

(ক) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরগুলির সমতলে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো যা $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরের লম্ব।

(খ) যদি $\vec{r} = 2t\hat{i} + \frac{1}{3}t^3\hat{j} + \frac{1}{5}t^5\hat{k}$, তাহলে $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$-এর মান নির্ণয় করো যখন $t = 1$।

(গ) প্রমাণ করো যে, $\left[\vec{\alpha}+\vec{\beta},\ \vec{\beta}+\vec{\gamma},\ \vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right] = 2[\alpha, \beta, \gamma]$।

(ঘ) বক্ররেখা $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$-এর $t = 1$ এবং $t = -1$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(ঙ) যদি $\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ বলটি একটি কণাকে বিন্দু A থেকে B-তে নিয়ে যায়, যেখানে A ও B-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, তবে বলটির দ্বারা সম্পন্ন কার্য নির্ণয় করো।

(চ) মান নির্ণয় করো ঃ $\int_2^3 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) dt$, যেখানে $\vec{r} = t^3\hat{i} + 2t^2\hat{j} + 3t\hat{k}$ ।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

(Calculus)

[Marks : 20]

1. Answer ***any four*** questions : 2×4

(a) Using L'Hôpital's Rule, evaluate $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$.

(b) Find the area bounded by the curve $x = y^2$ and the lines $x = 0$ and $x = 2$.

(c) Find the volume of revolution for $y = \sin(2x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, about x-axis.

(d) If $x^y = y^x$, then find $\frac{dy}{dx}$.

(e) If $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m$, then prove that $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$.

(f) If $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, then evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$.

(g) Find the perimeter of the curve $r = a(\cos\theta + \sin\theta), 0 \le \theta \le \pi$.

2. Answer ***any three*** questions : 4×3

(a) Show that the function $f(x) = |x|$ is not differentiable at $x = 0$.

(b) Find the arc length of the curve $x = a\cos(t), y = a\sin(t); 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(c) Find the values of a and b such that $\lim_{x \to 0} \frac{x(1 - a\cos x) + b\sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$.

(d) If $y = e^{m\sin^{-1}x}$, then show that $(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)x\, y_{n+1} - (m^2+n^2)y_n = 0$.

(e) If $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx$, show that $I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$. Hence, evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^8 x \, dx$.

(f) Find the surface area generated by revolving about y-axis the part of astroid $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ in the first quadrant.

Group - B

(Geometry)

[Marks : 35]

3. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the centre of the circle where the plane $x - 2y + 2z = 3$, intersects the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z = 45$.

(b) Show that $2x - 2y + 3z = 9$, touches $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9$, at the point $(2, -1, 1)$.

(c) What will be the form of the equation $x^2 - y^2 + 3x + 2y = 1$, if the co-ordinate axes are rotated through an angle $\frac{\pi}{2}$?

(d) Find the point of intersection of two conics $\frac{1}{r} = 1 + \cos\theta$ and $\frac{3}{r} = 1 - \cos\theta$.

Please Turn Over

4. Answer ***any five*** questions : 6×5

(a) If the straight line $r\cos(\theta-\alpha)=p$ touches the parabola $\frac{l}{r}=1+\cos\theta$, show that $p=\frac{l}{2}\sec\alpha$.

(b) The normal at any point P on the surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ meets the planes $x=0$, $y=0$, $z=0$, respectively at G_1, G_2, G_3. Show that $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$.

(c) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ and whose guiding curve is the ellipse $x^2+2y^2=1$, $z=3$.

(d) Show that the two circles

$$x^2+y^2+z^2-y+2z=0,\ x-y+z-2=0;$$

and

$$x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5=0,\ 2x-y+4z-1=0;$$

lie on the same sphere and find its (the sphere) equation.

(e) Show that the equation $7x^2-2xy+7y^2+22x-10y+7=0$ represents an ellipse. Find it's centre.

(f) Show that the equation of the cone which passes through the co-ordinate axes and the straight lines $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ and $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$ is $3yz+10zx+6xy=0$.

(g) Find the equations to the tangent planes to $2x^2-6y^2+3z^2=5$ which passes through the line $x+9y-3z=0$ and $3x-3y+6z-5=0$.

(h) Find the nature of the quadric surface given by the equation $2x^2+5y^2+3z^2-4x+20y-6z=5$.

(i) If r_1 and r_2 be two mutually perpendicular radius vectors of the ellipse $r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}$, then prove that $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Group - C
(Vector Analysis)
[Marks : 20]

5. Answer *any four* questions : 2×4

(a) If $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, then show that $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ are coplanar.

(b) If $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ are three vectors such that $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ and $|\vec{\alpha}|=3, |\vec{\beta}|=5, |\vec{\gamma}|=7$, find the angle between $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}$.

(c) Forces 6, 7, 2 pounds weight act on a particle along the vectors with co-ordinates (6, 2, 3), (3, – 2, 6) and (2, – 3, – 6) respectively. If the particle be displaced from the point (2, – 1, – 3) to the point (5, –1, 1), then show that the work done is $53\frac{4}{7}$ feet pounds weight, the unit of length being one foot.

(d) If $\vec{r}=t\hat{i}+t^2\hat{j}+\frac{2}{3}t^3\hat{k}$, then find $k=\frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$.

(e) Determine all possible values of λ for which the vector $\vec{\alpha}=\lambda(2\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$ is a unit vector.

(f) Show that the vector $\left(\vec{\beta}-\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}\right)$ is perpendicular to the vector $\vec{\alpha}$.

(g) Find the vector equation of a plane through the point (4, 3, –1) and perpendicular to the vector $\left(3\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}\right)$.

6. Answer *any three* questions : 4×3

(a) Find a unit vector in the plane of the vectors $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ and $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ and is perpendicular to the vector $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$.

(b) If $\vec{r}=2t\hat{i}+\frac{1}{3}t^3\hat{j}+\frac{1}{5}t^5\hat{k}$, then find the value of $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ at $t=1$.

(c) Prove that $\left[\vec{\alpha}+\vec{\beta},\ \vec{\beta}+\vec{\gamma},\ \vec{\gamma}+\vec{\alpha}\right]=2[\alpha,\beta,\gamma]$.

(d) Find the angle between the tangents to the curve $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ at the points $t=1$ and $t=-1$.

(e) If a force given by $\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ displace a particle from the point A to B where the position vectors of A and B are given by $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ respectively, find the work done by the force.

(f) Evaluate $\int_2^3 \left(\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$, where $\vec{r} = t^3\hat{i} + 2t^2\hat{j} + 3t\hat{k}$.